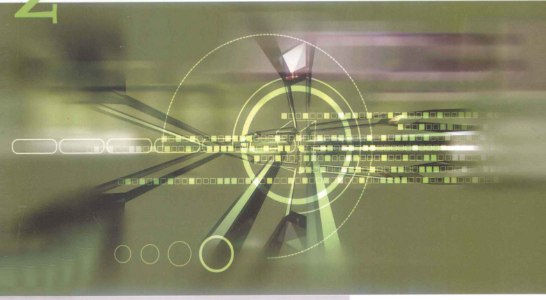
MO LUN

模论

姚海楼　平艳茹◎编著



北京工业大学出版社

MO LUN

模论

ISBN 978-7-5639-3723-3

9 787563 937233

定价：18.00元

模　　论

姚海楼　平艳茹　编著

北京工业大学出版社

内容提要

本书从模论的基本概念开始，通过基本例子，逐步介绍模论的基本概念和基本理论。主要内容包括：模与同态，直积、直和与自由模，内射模与投射模，阿廷模与诺特模，局部环与模的直和分解，单模与半单模，根基与基座，张量积与平坦模，范畴等。

本书可作为高等院校数学专业的本科生、研究生的模论教材，也可供相关专业的教师和科研人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

模论／姚海楼，平艳茹编著．—北京：北京工业大学出版社，2014.2

ISBN 978－7－5639－3723－3

Ⅰ．①模…　Ⅱ．①姚…②平…　Ⅲ．①模－高等学校－教材　Ⅳ．①O153.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 286948 号

模论

编　　著：姚海楼　平艳茹
责任编辑：李周辉
封面设计：何　强
出版发行：北京工业大学出版社
（北京市朝阳区平乐园 100 号　100124）
010－67391722（传真）bgdcbs@sina.com
出 版 人：郝　勇
经销单位：全国各地新华书店
承印单位：徐水宏远印刷有限公司
开　　本：787 mm×1092 mm　1/16
印　　张：10.5
字　　数：202 千字
版　　次：2014 年 2 月第 1 版
印　　次：2014 年 2 月第 1 次印刷
标准书号：ISBN 978－7－5639－3723－3
定　　价：18.00 元

前　言

模是域上线性空间在一般环上的推广。由于表示论的兴起，模的作用越来越重要，现在已经成为数学领域，特别是代数学领域的重要研究工具。同时，模论本身也是一个重要的研究领域，有许多重要问题有待研究解决。因此，许多高校的数学专业，特别是代数学方向，或是单独开设模论课程，或是在相关课程里加入模论的基本内容。编写本书的目的就是系统地介绍模论的基本内容，方便学习和使用模论的基本知识。模论的内容很丰富，而本书的编写起点较低，只要读者学过线性代数和近世代数的基本内容，就能学习本书。本书许多定理和命题的证明也尽可能用简单的方法给出。

在本书的编写过程中，编者参照了一些相关文献，并参考了编者多年的教学经验。本书可作为模论的研究生课程教材，也可作为自学教材，适合数学专业高年级本科生、研究生及数学爱好者学习使用。通过对本书的学习，能使读者较为系统地打下模论的知识基础，为数学的其他分支领域，特别是代数学领域的学习提供方便。

本书的主要内容曾于1989年作为模论课程给河北大学的代数专业研究生讲过。近十余年来，在北京工业大学的代数学专业研究生的模论课上也讲授过其中的主要内容。

由于编者知识有限，书中疏漏及错误在所难免，敬请读者批评指正。

目　录

第1章　模与同态

学习此书的读者应该已经熟悉近世代数中的环与群以及线性代数的一些概念，本书将在这个基础上讲述模的理论。

1.1　模的定义

模的概念可看作是线性空间的概念的推广，只是把线性空间的基域改为有单位元的环，确切的定义如下：

定义 1.1.1　设 R 是有单位元的环，M 是加群，即 $(M,\ +)$ 是一个可换群。如果还有一个“右数乘”运算 $M\times R\subseteq M$ 满足如下性质：

(1) $(m_1+m_2)r=m_1r+m_2r$,

(2) $m(r_1+r_2)=mr_1+mr_2$,

(3) $(mr_1)r_2=m(r_1r_2)$,

(4) $m\cdot 1=m$

这里，$m,\ m_1,\ m_2\in M,\ r,\ r_1,\ r_2\in R$，1 是 R 的单位元；则称 M 是一个右 R－模，并记为 M_R 或 $M=M_R$。即对于任意 $r\in R,\ m\in M$，M 中有唯一确定的元素与之对应，写为 mr。类似地，如果将“右数乘” mr 改写为“左数乘” rm，就可以得到左 R－模的定义。

容易看出，如果 R 是交换环，那么右 R－模可以看作是左 R－模，因为此时只需定义 $rm=mr(r\in R,\ m\in M)$ 就可以了，反之亦然。因此，在交换环的情况下，右 R－模与左 R－模可以不加区别。

而且，右 R－模与左 R－模的理论是平行的，以后无特别说明，所涉及的 R－模均是右 R－模。

下面看几个例子：

1. 设 V 是域 P 上的线性空间，则 V 是一个右 P－模。
2. 设 R 是一个有单位元的环，A 是 R 的右理想，则 A 是 R 的一个右 R－模。

3. 设 F 是域 E 上的子域，则 E 是一个右 F - 模。

4. 设 G 是加群，则 G 是一个右 $\mathbb{Z}$ - 模（$\mathbb{Z}$ 是整数环）。因为若 k 是一个整数，$x \in G$，按通常倍数定义：

$$kx = \begin{cases} \underbrace{x + x + \cdots + x}_{k\text{个}} & \text{若 } k > 0 \\ 0 & \text{若 } k = 0 \\ -((-k)x) & \text{若 } k < 0 \end{cases}$$

容易验证它满足模定义的四个条件。

这就是说，每个加群都可看作是一个 $\mathbb{Z}$ - 模，因此，通常对加群与 $\mathbb{Z}$ - 模不加以区别。

5. 设 F 是一个域，$G = \{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$，其他运算记为乘法，令

$$F(G) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} g_i a_i \mid a_i \in F, g_i \in G \right\}$$

这里，$g_i a_i$ 是形式定义，没有具体定义，$F(G)$ 中两个元素相等，规定为

$$\sum_{i=1}^{n} g_i a_i = \sum_{i=1}^{n} g_i b_i \Leftrightarrow a_i = b_i (i = 1, 2, \cdots, n)$$

我们再给 $F(G)$ 定义如下的“加法”与“数乘”运算：

$$\sum_{i=1}^{n} g_i a_i + \sum_{i=1}^{n} g_i b_i = \sum_{i=1}^{n} g_i (a_i + b_i)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} g_i a_i\right) k = \sum_{i=1}^{n} g_i (a_i k) \quad (k \in R)$$

容易验证，$F(G)$ 是一个以 $g_1, g_2, \cdots, g_n$ 为基的 F 上的线性空间，因而 $F(G)$ 是一个右 F - 模。

下面介绍双模的概念，所涉及的模可以是左模，也可以是右模。

定义 1.1.2 假设 M 是 R - 模又是 S - 模（对这两者，M 的加法结构是保持一致的）。如果 M 对 R 的“数乘”与对 S 的“数乘”是可交换的，则称 M 是一个 (S, R) - 双模。比如，M 是右 R - 模又是右 S - 模，则有 $(mr)s = (ms)r$，以上是对任意的 $m \in M$，$r \in R$，$s \in S$。

由此可见，(S, R) - 双模可分同侧的（同是左或同是右的）与异侧的（一个是左模，另一个是右模）两类。对于异侧的，当需要表明侧向时，我们常以 ${}_S M_R$ 表示 M 为左 S - 模且是右 R - 模的双模。例子如下：

1. 每一个 R - 模，都是一个 $(\mathbb{Z}, R)$ - 双模。
2. 假设 S 是环 R 的中心，则每一个 R - 模都是 (R, S) - 双模。
3. 设 R 是一个环，令 $M = R$，则 M 是 (R, R) - 双模。

4. 设 R 是一个非交换环，令 $M=R$，则 M 不是同侧 (R, R) - 双模。

类似域上的线性空间，容易证得环 R 上的模 M 中的元素运算满足如下简单性质：

(1) $O_M \cdot r = O_M$，$m \cdot O_R = O_M$，

(2) $-(mr) = (-m)r = m(-r)$，对任意的 $m \in M$，$r \in R$。

本书以后将 O_M 和 O_R 均简记为 O。

定义 1.1.3 一个代数是偶对 (A, K)，其中

(1) A 是一个环，

(2) K 是一个交换环，

(3) A 是一个右 K - 模，且满足

$$\forall a_1, a_2 \in A, k \in K[(a_1 a_2)k = a_1(a_2 k) = (a_1 k)a_2].$$

注：如果 K 是域，则右 K - 模 A 为向量空间。这时，如果 A 是有限维的就称 A 为域 K 上有限维代数，或简称有限维代数。

习题 1.1

1. 证明：每一个加群 M 都是一个 $\mathrm{End}(M)$ - 模，这里 $\mathrm{End}(M)$ 是 M 的自同态环，即 $\mathrm{End}(M) = \{\sigma \mid \sigma: M \to M$ 为群同态$\}$。

2. 设 M 是一个右 R - 模，f 是环 S 到 R 的一个环同态，且 $f(1_S) = 1_R$，这里的 1_S 与 1_R 分别是 S 与 R 的单位元，如果定义 $ms = mf(s)\,(m \in M, s \in S)$，证明：$M$ 是一个右 S - 模。

3. 设 M 是一个加群，证明：M 是一个右 R - 模的充分必要条件是存在一个环同态，即 $f: R \to \mathrm{End}(M)$；$f(1) = I_M$（I_M 是恒等映射）。这里的 $\mathrm{End}(M)$ 是 M 的自同态环。

4. (1) 设 M 是一个右模，令

$$(O :_R M) = \{r \in R \mid mr = 0, \ \forall m \in M\}$$

证明：$(O :_R M)$ 是 R 的一个理想。

(2) 假设 I 是含于 $(O :_R M)$ 内的任一个理想，定义

$$m(r+I) = mr\,(m \in M, r \in R)$$

证明：M 也是一个 $R/\mathbb{Z}$ - 模。

5. 设 M 是一个加群，k 是一个整数，证明：M 是一个 $\mathbb{Z}/(k)$ - 模的充要条件是 $kM = 0$。这里，$kM = \{km \mid m \in M\}$。

1.2 子模、子模的交与和

定义 1.2.1 设 M 是一个 R – 模，A 是 M 的一个子集，如果 A 对于 M 的加法和 M 与 R 的数乘来说也构成一个 R – 模，则称 A 是 M 的一个子模，M 称为 A 的扩模。

下面我们来引进几个记号。

符号 $A \hookrightarrow M$ 表示子模关系，符号“$:\Leftrightarrow$”及“$:=$”表示“定义为”；符号“$\Leftrightarrow$”表示“当且仅当”；符号“ϕ”表示空集；符号“$\exists$”表示“存在”；符号“$\wedge$”表示“并且”；符号“$\forall$”表示“任意”。

$A \underset{\neq}{\hookrightarrow} M :\Leftrightarrow A$ 是 M 的真子模。

$A \not\hookrightarrow M :\Leftrightarrow A$ 不是 M 的子模。

注意，$A \not\hookrightarrow M$ 并不一定有 $A \not\subset M$。

引理 1.2.1 令 M 是 R – 模，如果 A 是 M 的一个子集，$A \neq \varphi$，则下列命题等价：

(1) $A \hookrightarrow M$；

(2) A 是加群 M 的子加群，且对 $\forall a \in A$，$\forall r \in R$，有 $a \cdot r \in A$；

(3) $\forall a_1, a_2 \in A$，则 $a_1 + a_2 \in A$；$\forall a \in A$，$r \in R$，有 $a \cdot r \in A$。

例子如下：

1. 每个子模 M 有两个平凡子模 O 和 M。

2. 设 M 是任意一个模，$\forall m_0 \in M$，则 $m_0R = \{m_0r \mid r \in R\}$ 是 M 的一个子模，称之为循环子模。

3. 如果模 M 是域 K 上的向量空间，则子模为子空间。

定义 1.2.2 对于环 R 上的模 M，有

(1) 模 $M = M_R$ 叫作循环的$:\Leftrightarrow \exists m_0 \in M$，$m = m_0R$。

(2) 模 $M = M_R$ 叫作单的 $:\Leftrightarrow M \neq 0 \wedge \forall A \hookrightarrow M$，$A = 0$ 或 $A = M$。

(3) 子模 $A \hookrightarrow M$ 叫作极小的或极大的 $:\Leftrightarrow 0 \underset{\neq}{\hookrightarrow} A \wedge \forall B \hookrightarrow M$，$B \hookrightarrow A \Rightarrow B = 0$；或者 $A \underset{\neq}{\hookrightarrow} M \wedge \forall B \hookrightarrow M$，$A \underset{\neq}{\hookrightarrow} B \Rightarrow B = M$。

引理 1.2.2 M 是单的 $\Leftrightarrow M \neq 0 \wedge \forall m \in M \quad (m \neq 0 \Rightarrow mR = M)$。

证明：

“$\Rightarrow$”：令 $m \neq 0$，则 $m = m.1 \in mR$，于是 $mR \neq 0$，从而 $mR = M$。

“$\Leftarrow$”：令 $0 \underset{\neq}{\hookrightarrow} A \hookrightarrow M$，$0 \neq a \in A$，则 $aR = M$，但 $aR \hookrightarrow A$，于是 $A = M$。

例子如下：

1. $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ 不含有极小子模，但它含有极大子模。

2. 在 n 维向量空间 V_K 中，若视 V_K 为 K－模，则它的极小子模是一维子空间，极大模是 $(n-1)$ 维子空间。

3. 如果 K 是域，则 K_K 是单模。

4. 令 $R:=K_n$ 是系数在体 K 内的 $n\times n$ 方阵环。以后将证明，尽管 R 是单的，但 R_R 却不是 $(n>1)$。

引理 1.2.3　令 T 是模 M 的子模集，则

$$\bigcap_{A\in T} A=\{m\in M \mid \forall A\in T(m\in A)\}$$

是模 M 的子模。

由子模的定义即可得证。由此便知子模的交仍是子模。我们再次约定 $\bigcap_{A\in\varphi} A:=M$，得出推论 1.2.1。

推论 1.2.1　$\bigcap_{A\in T} A$ 是 M 的含于所有 $A\in T$ 内的最大子模。

例子如下：

1. $2\mathbb{Z}\cap 3\mathbb{Z}=6\mathbb{Z}$

2. $\bigcap_{p\text{是素数}} p\mathbb{Z}=0$

由子模的定义还可得到引理 1.2.4。

引理 1.2.4　令 X 是模 M_R 的子集，则

$$A=\begin{cases}\left\{\sum_{i=1}^{n} x_j r_j \mid x_j\in X\wedge r_j\in R\wedge n\in N\right\} & X\neq\phi\\ 0 & X=\phi\end{cases}$$

是 M 的一个子模。

定义 1.2.3　称引理 1.2.4 中定义的模为由 X 生成的子模，记为 $|X)$。易知引理 1.2.5：

引理 1.2.5　$|X)$ 是 M 的含有 X 的最小子模。即

$$|X)=\bigcap_{C\hookrightarrow M,X\subset C} C$$

当 M 是 (S,R)－双模时，由 M 的子集 X 生成的子模为

$$[X]=\begin{cases}\left\{\sum_{i=1}^{n} s_j x_j r_j \mid x_j\in X\wedge s_j\in S\wedge r_j\in R\wedge n\in N\right\} & X\neq\phi\\ 0 & X=\phi\end{cases}$$

同上面一样，$|X)$ 是 M 的含有 X 的最小子模，亦即

$$|X)=\bigcap_{C\hookrightarrow M,X\subset C} C$$

定义 1.2.4 令 $M=M_R$，则有

(1)模 M 的子集 X 叫作 M 的生成集:⇔ $\langle X\rangle = M$。

(2)一个模 M 叫作有限生成的:⇔模 M ∃有限生成集。

(3)模 M 的一个集 X 叫作自由的:⇔对每个有限子集 $\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}\subset X$ ($x_i\neq x_j$, $i\neq j$, $i, j=1, 2, \cdots, m$)，由 $\sum_{i=1}^{m} x_i r_i=0(r_i\in R)$，可得 $r_i=0$ ($i=1, 2, \cdots, m$)。

(4)模 M 的一个子集 X 叫作 M 的基:⇔X 是 M 的生成元集且 X 是自由的。

显然，一个模 M 是循环的 ⇔ 模 M∃一个生成元素。

引理 1.2.6 令 $X\neq\varphi$ 是 $M=M_R$ 的生成集，则 X 是基 ⇔ 对每个 $m\in M$，表示法 $m=\sum_{j=1}^{n} x_j r_j$，$x_j\in X$，$r_j\in R$ 在以下意义下是唯一的：

若 $m=\sum_{j=1}^{n} x_j r_j = \sum_{j=1}^{n} x_j r'_j \wedge x_i\neq x_j$，对 $i\neq j$ ($i, j=1, 2, \cdots, n$)，一定有 $r_j=r'_j$ ($j=1, 2, \cdots, n$)。

证明：

"⇒"：如果有

$$m = \sum_{j=1}^{n} x_j r_j = \sum_{j=1}^{n} x_j r'_j \wedge x_i \neq x_j, i\neq j\ (i,j=1,2,\cdots,n),$$

则 $0=\sum_{j=1}^{n} x_j(r_j-r'_j)$。

由于 X 是自由的，有 $r_j-r'_j=0$，从而 $r_j=r'_j$ ($j=1, 2, \cdots, n$)。

"⇐"：令 $\sum_{j=1}^{n} x_j r_j=0\wedge x_i\neq x_j$，对 $i\neq j$ ($i, j=1, 2, \cdots, n$)，还有 $0=\sum_{j=1}^{n} x_j\cdot 0$，于是 $r_j=0$ ($j=1, 2, \cdots, n$)，亦即 X 是自由的。

注： 当 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_t\}$ 是有限生成集($x_i\neq x_j$, $i\neq j$)。有 X 是基 ⇔ 对每个 $m\in M$，系数 $r_j\in R$ ($m=\sum_{j=1}^{n} x_j r_j$)是唯一确定的。

例子如下：

1. 每个模 M 都有平凡生成元集 M 自身。
2. 如果 R 是环，则$\{1\}$是 R_R 的基。

定义 1.2.5 令 $\wedge=\{A_i \mid i\in I\}$ 是 M 的一个子模集，则

$$\sum_{i\in I} A_i = \langle \bigcup_{i\in I} A_i\rangle$$

叫作子模$\{A_i \mid i\in I\}$的和。

如果 $\wedge=\{A_1, \cdots, A_n\}$，则 $\sum_{j=1}^{n} A_j$ 的每个元素可以写成 $\sum_{j=1}^{n} a_j(a_j\in A_j)$，式中未出

现的 a_j 可以用 0 代替。注意，这个式子不是唯一的。

定理 1.2.1 如果模 M_R 是有限生成的，则 M 的每一个真子模均含在 M 的一个极大子模内。

证明：令 $\{m_1, m_2, \cdots, m_t\}$ 是 M 的生成元集，令 $A \underset{\neq}{\hookrightarrow} M$，则集合 $\Gamma := \{B \mid A \hookrightarrow B \underset{\neq}{\hookrightarrow} M\}$ 是非空集(因 $A \in \Gamma$)，而且在集合的包含关系下是一个偏序集。

为应用佐恩引理，必须证明 Γ 的每个全序子集 T 均在 Γ 内有一个上界。为此，令

$$C = \bigcup_{B \in T} B;$$

则有 $A \hookrightarrow C$，若 $C = M$，则 $\{m_1, m_2, \cdots, m_t\} \subset C$，于是一定存在 $B \in T'$，满足 $\{m_1, m_2, \cdots, m_t\} \subset B$，所以有 $B = M$，矛盾。因此，证明了 $C \in \Gamma$。由佐恩引理，φ 内存在极大元 D。为证 D 是 M_R 的极大子模，令 $D \hookrightarrow L \underset{\neq}{\hookrightarrow} M_R$，则 $L \in \Gamma$。由于 D 是极大的，所以 $D = L$。

推论 1.2.2 每个有限生成模 $M(\neq 0)$ 有极大子模。

证明：因 $M \neq 0$，且 M 是有限生成的，故 $A = \{0\}$ 是 M 的一个真子模，由定理 1.2.1 即可得证。

下面我们叙述有限生成的另外一种等价形式。

定理 1.2.2 模 M_R 是有限生成的，当且仅当对 M 的每一个具有性质 $\sum_{i \in I} A_i = M$ 的子模集 $\{A_i \mid i \in I\}$ 存在一个有限子集 $\{A_i \mid i \in I\}$ (即 $I_0 \subset I$，I_0 是有限的)使得 $\sum_{i \in I} A_i = M$。

证明：令 M 是有限生成的，亦即 $M = m_1R + m_2R + \cdots + m_tR$。由于 $\sum_{i \in I} A_i = M$，而每个 m_j 是有限多个元素的和，故存在有限子集 $I_0 \subset I$，使得 $m_1, m_2, \cdots, m_t \in \sum_{i \in I_0} A_i$。于是有

$$M = m_1R + m_2R + \cdots + m_tR \hookrightarrow \sum_{i \in I_0} A_i \hookrightarrow M,$$

从而结论成立。

逆向证明，考虑子模集 $\{mR \mid m \in M\}$，则存在有限子集 $\{m_1R, \cdots, m_tR\}$，具有性质 $m_1R + m_2R + \cdots + m_tR = M$。因此，$M$ 是有限生成的。

下面给出有限生成概念的对偶概念。

定义 1.2.6 模 M_R 说是有限余生成的 $:\Leftrightarrow$ 对 M 的每个具有性质 $\bigcap_{i \in I} A_i = 0$ 的子模集 $\{A_i \mid i \in I\}$，则存在有限子集 $\{A_i \mid i \in I_0\}$ (即 $I_0 \subset I$，I_0 是有限的)具有性质 $\bigcap_{i \in I_0} A_i = 0$。

例子如下：

1. $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ 不是有限余生成的，因为 $\bigcap_{p\text{是素数}} p\mathbb{Z} = 0$，但对任意有限多个素数 $p_1, \cdots, p_n$，有

$$\bigcap_{i=1}^{n} p_i\mathbb{Z} = p_1\cdots p_n\mathbb{Z} \neq 0$$

2. 域 K 上的向量空间是有限余生成的 $\Leftrightarrow$ 它是有限维的。

定理 1.2.3 （模律）由 A、B、$C \hookrightarrow M$ 和 $B \hookrightarrow C$ 可推得

$$(A+B)\cap C = A\cap C + B\cap C = A\cap C + B$$

证明：令 $a+b=c\in(A+B)\cap C$，此处 $a\in A$，$b\in B$，$c\in C$。于是由 $B\hookrightarrow C$，可得 $a=c-b\in A\cap C$，$a+b=c\in(A\cap C)+B$，所以$(A+B)\cap C\hookrightarrow(A\cap C)+B$。

今令 $d\in A\cap C$，$b\in B$。由于 $B\hookrightarrow C\Rightarrow d+b\in(A+B)\cap C$，有$(A\cap C)+(B\cap C)\hookrightarrow(A+B)\cap C$。

习题 1.2

1. 设$\mathbb{Q}$是有理数全体，则$\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$是整数环上的模。证明：

(1)$\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$不存在极小模；

(2)$\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$不存在极大模；

(3)$\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$不存在有限生成集。

2. 证明：每个向量空间(斜域 K 上)都有基。

3. 令 $\Delta=\{A_i \mid i\in I\}$ 是 M_R 的一个子模集，则证明：

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \begin{cases}\left\{\sum_{i\in I'} a_i \mid a_i\in A_i \wedge I'\subset I \wedge I' \text{ 是有限的}\right\} & \Delta\neq\phi \\ 0 & \Delta=\phi\end{cases}$$

4. 设 A_1 与 A_2 都是 R－模 M 的子模，证明：如果 A_1+A_2 与 $A_1\cap A_2$ 都是有限生成的，则 A_1 与 A_2 也是有限生成的。

5. 证明：模 M 的子模 A 是极大的 $\Leftrightarrow \forall m\in M(m\notin A\Rightarrow M=mR+A)$。

1.3 内 直 和

定义 1.3.1 M 叫作 M 的子模集$\{B_i \mid i\in I\}$的内直和，

$$M=\bigoplus_{i\in I} B_i :\Leftrightarrow \begin{cases} M=\sum_{i\in I} B_i \\ \forall_j\in I,\ B_j\cap \sum_{i\in I, i\neq j} B_i = 0\end{cases}$$

$M = \bigoplus_{i \in I} B_i$ 有时也说成是 M 到子模集 $\{B_i \mid i \in I\}$ 的直和分解。

当 $I = \{1, 2, \cdots, n\}$ 时，也记为 $M = B_1 \oplus B_2 \cdots \oplus B_n$。

引理 1.3.1　令 $\{B_i \mid i \in I\}$ 是 M 的子模集，$M = \sum_{i \in I} B_i$，则定义 1.3.1 中的第二个条件等价于：对 M 的每个 x，$x = \sum_{j \in I'} b_i$，$b_i \in B_i$，$I' \subset I$，I' 有限，在下面的意义下是唯一的：

如果 $x = \sum_{j \in I'} b_i = \sum_{j \in I'} c_i$；$b_i$，$c_i \in B_i$ 则有 $\forall i \in I'(b_i = c_i)$

证明很明显，这里从略。

定义 1.3.2

(1) M 的一个子模 B 是 M 的直和项:$\Leftrightarrow \exists C \hookrightarrow M\ (M = B \oplus C)$。

(2) 模 $M \neq 0$ 叫作不可分解的:$\Leftrightarrow 0$ 和 M 是 M 的仅有的直和项。

例子如下：

1. 令 $V = V_K$ 是数域 K 上的一个向量空间，$\{x_i \mid i \in I\}$ 是 V 的基，则显然有 $V = \bigoplus_{i \in I} x_i K$。

2. 在 $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ 中，子模 $n\mathbb{Z}$ ($n \neq 0$，$n \neq \pm 1$) 不是直和项。

3. 每个单模 M 是不可不分解的。

4. 具有最大真子模或在非零子模集中具有最小子模的模 M 是不可分解的。

证明：若 $M = M_1 \oplus M_2$；M_1，$M_2 \hookrightarrow M$，使得 $M_i \hookrightarrow M_0 (i = 1, 2)$ 或存在 $M' \hookrightarrow M_i (i = 1, 2)$。这是不可能的。

1.4　商　　模

令 $C \hookrightarrow M_R$，则 C 是模 M_R 的加群的子加群。显然，商群 $M/C = \{m + C \mid m \in M\}$ 在加法

$$(m_1 + C) + (m_2 + C) = (m_1 + m_2) + C$$

下是存在的。

在 M/C 上定义模乘法，使 M/C 成为右模，称之为关于模 C 或对模 C 的商模或剩余类模，其模乘法定义如下：

$$(m + C)r = mr + C,\quad m \in M,\quad r \in R。$$

此定义易证是合理的，M/C 是一个右 R - 模。

左模和双模的商模可类似地定义。今令 R 是一个环，C 是 R 的两边理想，则 R 的加群关于子加群 C 的商群 R/C 可再构成环，称 R 为关于 C 的剩余类环或商环，其乘法可定义如下：

$$(r_1+C)(r_2+C)=r_1r_2+C,\ r_1,\ r_2\in R。$$

此定义易证是合理的，R/C 是商环。如果 1 是 R 的单位元，则 $(1+C)$ 是 R/C 的单位元。

定义 1.4.1 令 A，B 是 R 的两边理想，置

$$AB=\{a\cdot b\mid a\in A\wedge b\in B\};$$

即 AB 是由所有的乘积 $ab(a\in A,\ b\in B)$ 生成的加群，易见 AB 是一个理想，叫作理想 A 与 B 之积。

注： $AB=\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}a_jb_j\mid a_j\in A\wedge b_j\in B\wedge n\in\mathbb{N}\right\}$。

定义 1.4.2 令 C 是 R 的两边理想，则

(1)说 C 是 R 的强素理想 :⇔ $C\neq R\wedge\forall r_1,\ r_2\in R,\ r_1r_2\in C\Rightarrow(r_1\in C\vee r_2\in C)$。

(2)说 C 是 R 的素理想 :⇔ $C\neq R\wedge\forall A\cdot B\hookrightarrow{}_RR_R,\ AB\hookrightarrow C\Rightarrow(A\hookrightarrow C\vee B\hookrightarrow C)$。

(3)r 称为左零因子 :⇔ $r\neq0,\ \exists s\in R,\ s\neq0,\ rs=0$。

类似地，可定义右零因子。

(4)说 R 中没有零因子 :⇔ R 中不存在左、右零因子。

(5)令 $r\in R$，r'叫作右逆或左逆，或者叫 r 的逆元素 :⇔ $rr'=1$，或者 $r'r=1$，或者 $rr'=r'r=1$。

注：

(1)如果存在右零因子，则一定存在左零因子，反之亦然。

(2)如果 r'、r''分别是 r 的左、右逆元，则 $r'=r''$。

由定义 1.4.2 易知：

引理 1.4.1

(1)C 是强素理想⇒C 是 R 的素理想。

(2)如果 R 是交换的，则(1)之逆也成立。

定理 1.4.1 令 C 是 R 的两边理想，则下述命题成立：

(1)C 是 R 的强素理想 ⇔ R/C 没有零因子。

(2)C 是 R 的素理想 ⇔ 零理想是 R/C 的素理想。

(3)C 是 R 的两边理想 ⇔ R/C 是单的。

(4)C 是 R 的极大右理想 ⇔ R/C 是体。

证明：

(1)"⇒"：为了简便起见，假设 $\overline{R}=R/C$，$\bar{r}=r+C$。令 $\overline{r_1}$，$\overline{r_2}\in\overline{R}$，假设 $\overline{r_1r_2}=0$。于是，$r_1r_2+C=(r_1+C)(r_2+C)=C$，从而 $r_1r_2\in C$。因此，$r_1\in C\vee r_2\in C$，亦即 $\overline{r_1}=\bar{0}\vee\overline{r_2}=\bar{0}$。

"⇐"：令 r_1，$r_2\in R$，假设 $r_1r_2\in C$，则 $\overline{r_1r_2}=(r_1+C)(r_2+C)=r_1r_2+C=C$。因此，$\overline{r_1}=\bar{0}\vee\overline{r_2}=\bar{0}$，亦即 $r_1\in C\vee r_2\in C$。

(4)"⇒"：令 $0\neq\overline{r_1}\in\overline{R}$，则 $r\notin C$。于是，$R=rR+C$。因此，$\exists r'\in R$ 与 $c\in C$，使得

$$1=rr'+C\Rightarrow\bar{1}=rr'+C=(r+C)(r'+C)=\bar{r}\,\bar{r}'$$

亦即 $\overline{R}$ 的每个非零元有右逆元。

由 $\bar{1}=\bar{r}\,\bar{r}'\neq0$ 知 $\exists\bar{r}''\in\overline{R}$，使 $\bar{r}'\bar{r}''=\bar{1}$。因此，$\bar{r}=\bar{r}''$。所以 $\bar{r}'$ 是 $\bar{r}$ 的逆元，即 $\overline{R}$ 是体。

"⇐"：令 $r\in R$，$r\notin C$，则 $\bar{r}\neq0$。所以，$\exists\bar{r}'\in\overline{R}$　$(\bar{r}\,\bar{r}'=\bar{r}'\bar{r}=\bar{1})$。于是，$rr'+C=1+C$。即对某个 $c\in C$，$rr'+c=1$。因此，$rR+C=R$。此即意味着 C 是 R 的极大右理想。

(2)、(3)的证明类似于(1)、(4)的证明，从略。

例子如下：

(1)向量空间的商空间是熟知的。

$$(2)\ \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=\begin{cases}p\text{ 个元的素域}, & n=p\text{ 是素数}\\ \text{带有零因子的环}, & n\neq p\wedge n\neq0\wedge n\neq1\\ 0, & n=1\text{ 时}\\ \mathbb{Z}\text{（同构意义下）}, & n=0\text{ 时}\end{cases}$$

(3)令 $K[X]$ 是系数在域 K 上未定元 X 的多项式环。令 $f(X)\in K[X]$，$f(X)$ 不可约，则 $K[X]/f(X)$ 是 K 的有限维扩张。

习题 1.4

1. 令 $\{B_i\mid i=1,2,\cdots\}$ 是 $M=M_R$ 的子模集且满足条件

$$M=\sum_{i=1}^{\infty}B_i。$$

证明下列条件是等价的：

(1) $\forall j=1,2,\cdots$，$B_j\cap\sum_{i=j+1}^{\infty}B_i=0$。

(2) $M=\bigoplus_{i=1}^{\infty}B_i$。

2. 令$\{A_i \mid i \in I\}$是模 M 的子模集 $B \hookrightarrow M$。

(1)证明 $\sum_{i \in I}(A_i \cap B) \hookrightarrow (\sum_{i \in I} A_i) \cap B$。

(2)证明$(\bigcap_{i \in I} A_i) + B \hookrightarrow \bigcap_{i \in I}(A_i + B)$。

(3)给出一个例子满足 $\sum_{i \in I}(A_i \cap B) \neq (\sum_{i \in I} A_i) \cap B$。

(4)给出一个例子成立的关系：

$$(\bigcap_{i \in I} A_i) + B \neq \bigcap_{i \in I}(A_i + B)。$$

3 证明：若 A 是一个非零右 R - 模，则下列命题等价：

(1)A 是单模。

(2)$A = aR$，这里 a 是 A 的一个非零元。

(3)$A \cong R/L$，这里 L 是 R 的一个极大右理想。

1.5 同　　态

模的保持结构的映射叫作同态，其定义类似于向量空间的线性映射。

定义 1.5.1　令 A 和 B 同时是右 R - 模、左 S - 模或(S, R) - 双模，A 到 B 的同态 α：$A \to B$ 是满足下列条件的映射

(1) $\forall a_1, a_2 \in A$，$\forall r_1, r_2 \in R$，$\alpha(a_1r_1 + a_2r_2) = \alpha(a_1)r_1 + \alpha(a_2)r_2$。

(2) $\forall a_1, a_2 \in A$，$\forall s_1, s_2 \in S$，$\alpha(s_1a_1 + s_2a_2) = s_1\alpha(a_1) + s_2\alpha(a_2)$。

(3) $\forall a_1, a_2 \in A$，$\forall s_1, s_2 \in S$，$\forall r_1, r_2 \in R$，$\alpha(s_1a_1r_1 + s_2a_2r_2) = s_1\alpha(a_1)r_1 + s_2\alpha(a_2)r_2$。

符号 α：$A_R \Rightarrow B_R$ 表示 A 与 B 均是右 R - 模，α 是同态。

为了强调环和同态 α：$A_R \Rightarrow B_R$ 所作用的边旁，说 α 是右 R - 模或右模同态，将 $\alpha(a)$记为 αa。同样，对 α：$sA \to sB$，$(a)\alpha$ 记为 $a\alpha$。这样，定义 1.5.1(2)中的方程就可以写成下面的形式：

$$(s_1a_1 + s_2a_2)\alpha = s_1(a_1\alpha) + s_2(a_2\alpha)。$$

因此同态写在环的运算的反面。一般地，映射 α：$A \to B$ 用符号 $a \mapsto \alpha(a)$表示。可以把 α：$A \to B$ 和 $a \mapsto \alpha(a)$合写成以下形式：

$$\alpha: A \ni a \mapsto \alpha(a) \in B。$$

下面一些符号是常用的：

(1)α 的原像域：$\mathrm{Dom}(\alpha) = A$。

(2) α 的像域：$\mathrm{Cod}(\alpha)=B$。

(3) α 的像：$\mathrm{Im}(\alpha)=\{\alpha(a)\mid a\in A\}$。

(4) α 是单映射 $:\Leftrightarrow \forall a_1,\ a_2\in A,\ \alpha(a_1)=\alpha(a_2)\Rightarrow a_1=a_2$（即 α 是 1－1 的）。

(5) α 是满映射 $:\Leftrightarrow \mathrm{Im}(\alpha)=\mathrm{Cod}(\alpha)$（即 α 是到上的）。

(6) α 是双射 $:\Leftrightarrow$ α 是单的且是满的。

同态的例子：

(1) A 到 B 的零同态 0：$A\ni a_1\mapsto 0\in B$。

(2) 恒等单射 $=A\hookrightarrow B$ 的子模包含映射 i：$A\ni a\mapsto a\in B$。

(3) 模 A 到商模 A/C 的自然同态，其中 $C\hookrightarrow A$：

$$\gamma:\ A\ni a\mapsto a+C\in A/C。$$

注：

(1) A 的恒等映射可理解为特殊的包含情形，记之为 I_A。

(2) 若 $\alpha,\ \beta$ 是两个同态且 $\mathrm{Cod}(\alpha)=\mathrm{Dom}(\beta)$，则 $\alpha,\ \beta$ 的合成记为 $\beta\alpha$，是 A 到 C 的同态，即 α：$A\to B$，β：$B\to C$，

$$\forall a\in A(\beta\alpha)a=\beta(\alpha a)。$$

(3) 如果 α：$A\to B$ 存在一个逆映射，则 α 是双射。

(4) α 的逆映射，如果存在，则也是同态，记为 α^{-1}。

(5) 一般来说，α 不存在逆映射。

(6) 引进两个符号。令 $U\subset A$，$V\subset B$，则定义

$$\alpha(U)=\{\alpha(u)\mid u\in U\},\ \alpha^{-1}(V)=\{a\mid a\in A\wedge\alpha(a)\in V\}。$$

再做如下定义：

① α 的核 $=\mathrm{Ker}(\alpha)=\alpha^{-1}(0)$；$\alpha$ 的像 $=\mathrm{Im}(\alpha)=\alpha(A)$；

② α 的上核 $=\mathrm{CoKer}(\alpha)=\mathrm{Cod}(\alpha)/\mathrm{Im}(\alpha)=B/\alpha(A)$；

③ α 的上像 $=\mathrm{CoIm}(\alpha)=\mathrm{Dom}(\alpha)/\mathrm{Ker}(\alpha)=A/\alpha^{-1}(0)$。

定义 1.5.2　同态 α：$A_R\to B_R$ 叫作

(1) 单态射 $:\Leftrightarrow$ $\forall$ 右 R－模 C，$\forall\gamma_1,\ \gamma_2\in\mathrm{Hom}_R(C,\ A)$，$\alpha\gamma_1=\alpha\gamma_2\Rightarrow\gamma_1=\gamma_2$。

(2) 满态射 $:\Leftrightarrow$ $\forall$ 右 R－模 C，$\forall\beta_1,\ \beta_2\in\mathrm{Hom}_R(B,\ C)$，$\beta_1\alpha=\beta_2\alpha\Rightarrow\beta_1=\beta_2$。

(3) 双态射 $:\Leftrightarrow$ α 是满态射且是单态射。

(4) 同构 $:\Leftrightarrow \exists\alpha'\in\mathrm{Hom}_R(B,\ A)$，$\alpha'\alpha=I_A\wedge\alpha\alpha'=I_B$。

有定义可立即得到定理 1.5.1。

定理 1.5.1　令 α：$A\to B$ 是一个同态，则有

(1) α 是单射 $\Leftrightarrow$ α 是单态射。

(2) α 是满射 $\Leftrightarrow$ α 是满态射。

(3) α 是双射 $\Leftrightarrow$ α 是双态射 $\Leftrightarrow$ α 是同构。

定义 1.5.3 两个模 A，B 叫作同构的，记为 $A \cong B :\Leftrightarrow \exists$ 同构 α：$A \to B$。

注： $\cong$ 是右 R - 模的等价关系。

定理 1.5.2 令 $U_R \hookrightarrow M_R$，则有 M/U 是有限余生成的 $\Leftrightarrow$ 对 M 的具有性质 $\bigcap_{i\in I} A_i = U$ 的每个子模集 $\{A_i \mid i \in I\}$ 而言，都存在一个有限子集 $\{A_i \mid i \in I_0\}$ (i. e. I_0 有限) 具有性质 $\bigcap_{i\in I} A_i = U$。

证明：

"$\Rightarrow$"：令 γ：$M \to M/U$ 是一个自然同态，因为 $\bigcap_{i\in I} A_i = U$ 蕴含着 $U = \mathrm{Ker}(\gamma) \hookrightarrow A_i$，所以

$$\bigcap_{i\in I} \gamma(A_i) = \gamma(\bigcap_{i\in I} A_i) = \gamma(U) = 0 \hookrightarrow M/U。$$

因 M/U 是有限余生成的，故存在有限子集 $I_0 \subset I$ 具有性质 $\bigcap_{i\in I_0} \gamma(A_i) = 0$。于是，

$$\gamma^{-1}(0) = U = \gamma^{-1}(\bigcap_{i\in I_0} \gamma(A_i)) = \bigcap_{i\in I_0} \gamma^{-1}\gamma(A_i) = \bigcap_{i\in I_0} \gamma(A_i + U)。$$

所以，$U = \bigcap_{i\in I_0} A_i$。

"$\Leftarrow$"：令 $\{\overline{A}_i \mid i \in I\}$ 是 M/U 的子模集，并满足 $\bigcap_{i\in I} \overline{A}_i = 0$，得

$$\gamma^{-1}(0) = U = \gamma^{-1}(\bigcap_{i\in I} \overline{A}_i) = \bigcap_{i\in I} \gamma^{-1}(\overline{A}_i)。$$

由假设，存在有限子集 $I_0 \subset I$，具有性质

$$\bigcap_{i\in I_0} \gamma^{-1}(\overline{A}_i) = U;$$

可得

$$\gamma(\bigcap_{i\in I_0} \gamma^{-1}(\overline{A}_i)) = \bigcap_{i\in I_0} \gamma\gamma^{-1}(A_i) = \bigcap_{i\in I_0} (\overline{A}_i \cap \mathrm{Im}(\gamma)) = \bigcap_{i\in I_0} \overline{A}_i = \gamma(U) = 0。$$

定义 1.5.4 一个格是一个偏序集，它里面任意两个元都有最小上界和最大下界。一个完全格是每个子集都有最小上界和最大下界的格。

模的子模集在以包含关系 $\hookrightarrow$ 作为偏序关系下，构成一个完全格。令 A_R 是已知模，记 A 的子模格为 $\mathrm{Lat}(A)$，令 α：$A \to L$ 是一个同态，记 $C = \mathrm{Ker}(\alpha)$，$N = \mathrm{Im}(\alpha)$，考虑子格

$$\mathrm{Lat}(A, \overline{C}) = \{U \mid C \hookrightarrow U \hookrightarrow A\}$$

$$\mathrm{Lat}(L, N) = \{V \mid V \hookrightarrow N\} = \mathrm{Lat}(N)$$

可得定理 1.5.3 结果，证明从略。

定理 1.5.3 $\hat{\alpha}$ 按下面定义的双射

$$\hat{\alpha}\mathrm{Lat}(A, \overline{C}) \ni U \mapsto \alpha(U) \in \mathrm{Lat}(L, N)$$

关于此，以下等式成立

(1) $\hat{\alpha}(U_1 + U_2) = \hat{\alpha}(U_1) + \hat{\alpha}(U_2)$，

(2)$\hat{\alpha}(U_1 \wedge U_2) = \hat{\alpha}(U_1) \cap \hat{\alpha}(U_2)$。

亦即，$\hat{\alpha}$ 是 $\mathrm{Lat}(\mathrm{Dom}(\alpha),\ \overline{\mathrm{Ker}(\alpha)})$ 和 $\mathrm{Lat}(\mathrm{Cod}(\alpha),\ \mathrm{Im}(\alpha)) = \mathrm{Lat}(\mathrm{Im}(\alpha))$ 之间的同构映射。

推论 1.5.1　令 $C \hookrightarrow A$，v: $A \to A/C$，则

$$\hat{v}:\ \mathrm{Lat}(A,\ \overline{C}) \ni U \to v(U) \in \mathrm{Lat}(A/C)$$

是格同构。

推论 1.5.2　C 是极大的 $\Leftrightarrow$ A/C 是单的。

习题 1.5

1. 令 α: $A \to B$ 及 β: $B \to C$ 是同态，证明：

(1)α 与 β 是单同态 $\Rightarrow$ $\beta\alpha$ 是单同态。

(2)α 与 β 是满同态 $\Rightarrow$ $\beta\alpha$ 是满同态。

(3)$\beta\alpha$ 是单同态 $\Rightarrow$ α 是单同态。

(4)$\beta\alpha$ 是满同态 $\Rightarrow$ β 是满同态。

2. 令 α: $A \to B$ 是一个同态，证明：

(1)α 是单同态 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(\alpha) = 0$。

(2)$U \hookrightarrow A \Rightarrow \alpha^{-1}(\alpha(U)) = U + \mathrm{Ker}(\alpha)$。

(3)$U \hookrightarrow B \Rightarrow \alpha(\alpha^{-1}(U)) = U \cap \mathrm{Im}(\alpha)$。

(4)令 β: $B \to C$ 是一个同态，则

$$\mathrm{Ker}(\beta\alpha) = \alpha^{-1}(\mathrm{Ker}(\beta)) \wedge \mathrm{Im}(\beta\alpha) = \beta(\mathrm{Im}(\alpha))。$$

3. 证明：设图 1.1 是交换的，亦即 $\beta\alpha = \delta\gamma$。如果 γ 是满同态，β 是单同态，则 $\mathrm{Im}(\alpha) = \beta^{-1}(\mathrm{Im}(\delta))$，$\mathrm{Ker}(\delta) = \gamma(\mathrm{Ker}(\alpha))$。

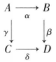


图 1.1

4. 令 α: $A \to B$ 是一个同态，$\{A_i \mid i \in I\}$ 是 A 的子模集，$\{B_i \mid i \in I\}$ 是 B 的子模集，证明：

(1)$\alpha(\sum_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} \alpha(A_i)$，则 $\alpha^{-1}(\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} \alpha^{-1}(B_i)$。

(2)$\alpha^{-1}(\sum_{i \in I} B_i) \hookrightarrow \sum_{i \in I} \alpha^{-1}(B_i)$，则 $\alpha(\bigcap_{i \in I} A_i) \hookrightarrow \bigcap_{i \in I} \alpha(A_i)$。

(3)令 $B_i \hookrightarrow \mathrm{Im}(\alpha)(\forall i \in I)$，则 $\alpha^{-1}(\sum_{i \in I} B_i) = \bigcap_{i \in I} \alpha^{-1}(B_i)$。

(4) 令 $\mathrm{Ker}(\alpha) \hookrightarrow A_i (\forall i \in I)$，则 $\alpha(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} \alpha(A_i)$。

1.6 同态的分解

定理 1.6.1 （同态定理）

(1) 每一个模同态 α：$A \to B$，有分解 $\alpha = \alpha' v$。此处，v：$A \to A/\mathrm{Ker}(\alpha)$ 是自然同态，α' 是由下面定义的单同态：

$$\alpha': A/\mathrm{Ker}(\alpha) \ni a + \mathrm{Ker}(\alpha) \mapsto \alpha(a) \in B,$$

α' 是同构当且仅当 α 是满同态。

(2) 每个环同态 ρ：$R \to S$ 有一个分解 $\rho = \rho' v$。此外，v：$R \to R/\mathrm{Ker}(\rho)$ 是自然同态，ρ' 是按下面定义的单同态：

$$\rho': R/\mathrm{Ker}(\rho) \ni r + \mathrm{Ker}(\rho) \mapsto \rho(r) \in S,$$

ρ' 是同构当且仅当 ρ 是满的。

注： 等式 $\alpha = \alpha' v$ 相当于下面的交换图，如图 1.2 所示。

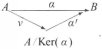


图 1.2

证明： 只证(1)就够了，(2)的证明是类似的。

首先证明 α' 是一个定义良好的映射。令 $a + \mathrm{Ker}(\alpha) = a_1 + \mathrm{Ker}(\alpha)$，则有 $a_1 = a + u$，$u \in \mathrm{Ker}(\alpha)$。因此，$\alpha'(a_1 + \mathrm{Ker}(\alpha)) = \alpha(a_1) = \alpha(a + u) = \alpha(a) + \alpha(u) = \alpha(a) = \alpha'(a + \mathrm{Ker}(\alpha))$。所以，$\alpha'$ 显然是一个同态。为证 α' 是单同态，令

$$\alpha'(a_1 + \mathrm{Ker}(\alpha)) = \alpha(a_1) = 0。$$

因此，$a_1 \in \mathrm{Ker}(\alpha)$，故

$$a_1 + \mathrm{Ker}(\alpha) = 0 + \mathrm{Ker}(\alpha)。$$

于是，$\mathrm{Ker}(\alpha') = 0$。

令 $\forall a \in A$，则有

$$\alpha'(v(a)) = \alpha'(a + \mathrm{Ker}(\alpha)) = \alpha(a)。$$

所以 $\alpha = \alpha' v$。由于 α' 是单同态以及 $\mathrm{Im}(\alpha') = \mathrm{Im}(\alpha)$，当 α 是满同态时，α' 是同构。

推论 1.6.1 (1) 如果 α：$A \to B$ 是一个模同态，则

$$\hat{\alpha}: A/\mathrm{Ker}(\alpha) \ni a + \mathrm{Ker}(\alpha) \mapsto \alpha(a) \ni \mathrm{Im}(\alpha)。$$

是一个同构。因此有

$$A/\mathrm{Ker}(\alpha)\cong\mathrm{Im}(\alpha)。$$

(2)如果ρ: $R\to S$是一个环同态，则

$$\hat{\rho}:\ R/\mathrm{Ker}(\rho)\ni r+\mathrm{Ker}(\rho)\mapsto\rho(r)\in\mathrm{Im}(\rho)$$

是一个同构。因此，有

$$R/\mathrm{Ker}(\rho)\cong\mathrm{Im}(\rho)。$$

定理1.6.2 （第一同构定理）令$B\hookrightarrow A$，$C\hookrightarrow A$，则有

$$(B+C)/C\cong B/B\cap C。$$

证明：考虑自然同态

$$\nu:\ B+C\to(B+C)/C,$$

则有$\mathrm{Ker}(\nu)=C$。再考虑限制同态

$$\alpha=\nu|_B:\ B\to(B+C)/C,$$

则有$\mathrm{Ker}(\alpha)=B\cap C$：利用上面的推论1.6.1可得：

$$(B+C)/C\cong\mathrm{Im}(\nu)=\nu(B+C)=\nu(B)+\nu(C)=\nu(B)$$

$$B/(B\cap C)\cong\mathrm{Im}(\alpha)=\alpha(B)=\nu(B)$$

于是，$(B+C)/C\cong B/(B\cap C)$。

注：不引用推论1.6.1，也可直接证明

$$B/(B\cap C)\ni b+(B\cap C)\mapsto b+C\in(B+C)/C$$

是一个同构。

推论1.6.2 $A=B\oplus C\Rightarrow A/C\cong B$

证明 $A/C=(B+C)/C\cong B/(B\cap C)=B/\{0\}\cong B$

定理1.6.3 （第二同构定理）令$C\hookrightarrow B\hookrightarrow A$，则有

$$A/B\cong(A/C)/(B/C)。$$

证明：令ν_1: $A\to A/C$，ν_2: $A/C\to(A/C)/(B/C)$是自然同态，此处的ν_2是定义良好的。由$C\hookrightarrow B\hookrightarrow A$，可知$B/C$也是$A/C$的子模。由于$\nu_1$和$\nu_2$是满同态，$\nu_2\nu_1$也是满同态。因此，由推论1.6.1得

$$A/\mathrm{Ker}(\nu_1\nu_2)\cong(A/C)/(B/C);$$

而$\mathrm{Ker}(\nu_1\nu_2)=\nu_1^{-1}(\mathrm{Ker}(\nu_2))=\nu_1^{-1}(B/C)=\nu_1^{-1}(\nu_1(B))=B+\mathrm{Ker}(\nu_1)=B+C=B$，于是有

$$A/B\cong(A/C)/(B/C)。$$

例子：$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\cong(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})/(3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$

定理1.6.4 令α: $A\to B$是一个同态，φ: $A\to C$是具有性质$\mathrm{Ker}(\varphi)\hookrightarrow\mathrm{Ker}(\alpha)$的满同态，则存在一个同态$\lambda$具有如下性质：

(1)$\alpha=\lambda\varphi$。

注：这意味着图 1.3：

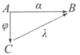


图 1.3

(2)$\mathrm{Im}(\lambda)=\mathrm{Im}(\alpha)$

(3)λ 是单同态 $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi)=\mathrm{Ker}(\alpha)$

证明：由于 φ 是满同态，$\forall c\in C$，$\exists a\in A$ 使得 $\varphi(a)=c$。对每个 $c\in C$，选定一个 $a_c\in A$，使 $\varphi(a_c)=c$。于是定义一个映射如下：

$$\lambda: C\to B,\ \lambda(c)=\alpha(a_c)。$$

为证 λ 确实是一个定义良好的同态，首先要确立 λ 与 a_c 的选择无关。令 $c=\varphi(a)=\varphi(a_c)$，$a$，$a_c\in A$，则 $\varphi(a-a_c)=0$。所以，$a-a_c\in \mathrm{Ker}(\varphi)\hookrightarrow \mathrm{Ker}(\alpha)$。因此，$\alpha(a-a_c)=0\Rightarrow\alpha(a)=\alpha(a_c)=\lambda(c)$。

下面 λ 证明是一个同态。

令 $c_1=\varphi(a_1)$，$c_2=\varphi(a_2)$，a_1，$a_2\in A$，r_1，$r_2\in R$，则

$\varphi(a_1r_1+a_2r_2)=\varphi(a_1)r_1+\varphi(a_2)r_2=c_1r_1+c_2r_2\Rightarrow\lambda(c_1r_1+c_2r_2)=\alpha(a_1r_1+a_2r_2)=\alpha(a_1)r_1+\alpha(a_2)r_2=\lambda(c_1)r_1+\lambda(c_2)r_2$。

由 λ 的定义可证得(1)与(2)。为证明(3)，首先假设 λ 是一个单射。由假设，$\mathrm{Ker}(\varphi)\hookrightarrow \mathrm{Ker}(\alpha)$，为证 $\mathrm{Ker}(\alpha)\hookrightarrow \mathrm{Ker}(\varphi)$，令 $a\in \mathrm{Ker}(\alpha)$。因为 $0=\alpha(a)=\lambda(\varphi(a))$，所以 $\varphi(a)=0$，从而有 $a\in \mathrm{Ker}(\varphi)$。假设 $\mathrm{Ker}(\varphi)=\mathrm{Ker}(\alpha)$，则由 $\lambda(c)=0$ 和 $c=\varphi(a)\Rightarrow\alpha(a)=0$。因此，$a\in \mathrm{Ker}(\alpha)=\mathrm{Ker}(\varphi)$。所以，$c=\varphi(a)$。

下面来看它的两种特殊情形：

(1)令 α: $A\to B$，$A'\hookrightarrow \mathrm{Ker}(\alpha)$，$C=A/A'$，$\varphi=v$: $A\to A/A'$是自然同态，则图 1.4 是交换的。此处，$\lambda(a+A')=\alpha(a)$。因为，$A'=\mathrm{Ker}(\alpha)$，这是定理 1.6.1(同态定理)。

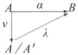


图 1.4

(2)令 $A''\hookrightarrow A'\hookrightarrow A$，$\alpha=v'=A\to A/A'$，$\varphi=v''$: $A\to A/A''$，则图 1.5 是交换的。此处 $\lambda(a+A'')=a+A'$。

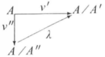


图 1.5

令 $\lambda=\beta\alpha$ 是已知同态 λ 的一个已知分解，下面探讨 λ 的性质和 B 的“分解性质”之间的关系。

定义 1.6.1　(1)子模 $B_0\hookrightarrow B$ 叫作 B 的直和项:⇔∃子模 $B_1\hookrightarrow B$ 使得 $B=B_0\oplus B_1$。

(2)单映射 α: $A\to B$ 叫作分裂的 :⇔ $\mathrm{Im}(\alpha)$是 B 的直和项。

(3)满同态射 β: $B\to C$ 叫作分裂的:⇔$\mathrm{Ker}(\beta)$是 B 的直和项。

引理 1.6.1　令图 1.6 是交换的, i. e. $\lambda=\beta\alpha$，则：

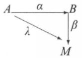


图 1.6

(1) $\mathrm{Im}(\alpha)+\mathrm{Ker}(\beta)=\beta^{-1}(\mathrm{Im}(\lambda))$

(2) $\mathrm{Im}(\alpha)\cap\mathrm{Ker}(\beta)=\alpha(\mathrm{Ker}(\lambda))$

证明:

(1) $\lambda=\beta\alpha\Rightarrow\mathrm{Im}(\lambda)=\mathrm{Im}(\beta\alpha)=\beta(\mathrm{Im}(\alpha))\Rightarrow\beta^{-1}(\mathrm{Im}(\lambda))=\beta^{-1}(\beta(\mathrm{Im}(\alpha))=\mathrm{Im}(\alpha)+\mathrm{Ker}(\beta)$。

(2) $\mathrm{Ker}(\lambda)=\mathrm{Ker}(\beta\alpha)=\alpha^{-1}(\mathrm{Ker}(\beta))\Rightarrow\alpha(\mathrm{Ker}(\lambda))=\alpha(\alpha^{-1}(\mathrm{Ker}(\beta)))=\mathrm{Ker}(\beta)\cap\mathrm{Im}(\alpha)$。

由此引理可直接得到以下两个推论：

推论 1.6.3

(1) λ 是一个满同态⇒$\mathrm{Im}(\alpha)+\mathrm{Ker}(\beta)=\beta^{-1}(M)=B$。

(2) λ 是一个单同态⇒$\mathrm{Im}(\alpha)\cap\mathrm{Ker}(\beta)=\alpha(0)=0$。

(3) λ 是同构⇒$\mathrm{Im}(\alpha)\oplus\mathrm{Ker}(\beta)=B$。

推论 1.6.4

(1)对 α: $A\to B$，下列叙述等价：

①α 是分裂单同态。

②存在一个同态 β: $B\to A$，使得 $\beta\alpha=1_A$。

(2)对 β: $B\to C$ 下列叙述等价：

①β 是分裂满同态。

②存在一个同态 γ: $C\to B$ 使得 $\beta\gamma=1_C$。

特别地，α 是子模 $A\hookrightarrow B$ 的包含映射，则 β: $B\to B/A$ 是自然满同态。

习题 1.6

1. 证明推论 1.6.3 与推论 1.6.4。
2. 证明：若 A 是 R－模，且 $U' \hookrightarrow U \hookrightarrow A$，$V' \hookrightarrow V \hookrightarrow A$，则
$$[U'+(U\cap V)]/[U'+(U\cap V')]\cong[V'+(U\cap V)]/[V'+(U'\cap V)]。$$

1.7 若尔当－赫尔德－施赖埃尔定理

现在考虑模 A 的子模的有限链，令

$$0=B_0\hookrightarrow B_1\hookrightarrow B_2\hookrightarrow\cdots\hookrightarrow B_{k-1}\hookrightarrow B_k=A$$
$$0=C_0\hookrightarrow C_1\hookrightarrow C_2\hookrightarrow\cdots\hookrightarrow C_{l-1}\hookrightarrow C_l=A$$

分别用 B 和 C 记第一个和第二个链。

定义 1.7.1

(1)链 B 的长度定义为 k

(2)链 B 的因子是商模 $B_i/B_{i-1}(i=1,2,\cdots,k)$，$B$ 的第 i 个因子是 B_i/B_{i-1}。

(3)链 B 和 C 说是同构的，$B\cong C$:⇔在 B 的指标集 I 和 C 的指标集 J 之间存在双射 δ，使得

$$B_i/B_{i-1}\cong C_{\delta(i)}/C_{\delta(i)-1},\ i=1,2,\cdots,k。$$

(4)C 叫作 B 的加细，或者 B 叫作 C 的子链 :⇔ $B=C$(平凡加细)，或者 B 是由略去 C 的某些 C_j 得到的。

(5)模 A 的链 B 叫作合成列 :⇔ $\forall i=1,2,\cdots,k$，B_{i-1} 在 B_i 内是极大的(⇔ $\forall i=1,2,\cdots,k$，B_i/B_{i-1} 是单的)。

(6)模 A 说是有限长度的 :⇔ $A=0$ 或 A 有合成列。

例子如下：

1. 令 $V=V_K$ 是一个向量空间，$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是 V 的一个基，则

$$0\hookrightarrow x_1K\hookrightarrow x_1K+x_2K\hookrightarrow\cdots\hookrightarrow\sum_{i=1}^{n-1}x_iK\hookrightarrow\sum_{i=1}^{n}x_iK=V$$

是 V 的一个合成列。

2. $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ 的每个链都能真正地加细，如果

$$0\hookrightarrow B_1\hookrightarrow\cdots\hookrightarrow\mathbb{Z}$$

是一个这样的链且 $B_1 \neq 0$，则因$\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$不含极小子模，B_1 不是单的。因此，在 0 和 B_1 之间可以插入一个不同于这二者的子模，所以$\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$没有合成列。

3. 在$\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$中，每个链

$$0 \hookrightarrow B_1 \hookrightarrow B_2 \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow B_k = \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}\ (0 \neq B_1,\ B_{k-1} \neq \mathbb{Q})$$

可在 0 和 B_1 之间进行加细，也可在 B_{k-1} 和$\mathbb{Q}$之间进行加细，这是因为$\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$既不含有极小子模也不含有极大子模。因此，$\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$没有合成列。

定理 1.7.1 （若尔当－赫尔德－施赖埃尔定理）：一个模的任何两个有限链有同构的加细。

证明： 令 B 和 C 是模 A 的已知有限链，把模

$$B_{ij} = B_i + (B_{i+1} \cap C_j),\ j = 0,\ 1,\ \cdots,\ l$$

插在 B_i 和 B_{i+1} 之间（$i = 0,\ 1,\ \cdots,\ k-1$）。显然有

$$B_i = B_{i,0} \hookrightarrow B_{i,1} \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow B_{i,l} = B_{i+1}。$$

类似地，把模

$$C_{ij} = C_j + (C_{j+1} \cap B_i),\ i = 0,\ 1,\ \cdots,\ k$$

插在 C_j 和 C_{j+1} 之间（$j = 0,\ 1,\ \cdots,\ l-1$），有

$$C_j \hookrightarrow C_{0,j} \hookrightarrow C_{1,j} \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow C_{k,j} = C_{j+1}。$$

两个加细的链分别记为 B^* 和 C^*，则它们有相同的长度 kl。

由定理 1.6.2（第一同构定理），得

$$B_{i,j+1}/B_{i,j} \cong C_{i+1,j}/C_{i,j},\ i = 0,\ 1,\ \cdots,\ k-1;\ j = 0,\ 1,\ \cdots,\ l-1。$$

由于在 kl 个同构中，正好有 B^* 的 kl 个因子和 C^* 的 kl 个因子出现，于是有

$$B^* = C^*。$$

推论 1.7.1 令 A 是一个有限长度的模，则有

(1) 每个形如

$$0 = B_0 \subsetneq B_1 \subsetneq B_2 \subsetneq \cdots \subsetneq B_k = A$$

的链 B 均可以加细成为一个合成列。

(2) A 的任两个合成列均同构。

证明：

(1) 由假设存在 A 的一个合成列 C，根据若尔当－赫尔德－施赖埃尔定理，B 和 C 有同构的加细 B^* 和 C^*，因作为合成列的 C 仅能进行平凡的加细，故存在 B 的加细 B^0，使得 $B^0 \cong C$。由于 C 的所有因子是单的。因此，B^0 的因子也是单的，所以 B^0 是一个合成列。

(2) 令 B 和 C 是合成列，利用(1)的术语，则 $B^0 \cong C$。由于 B^0 是 B 的加细，二者均是合成列，于是得 $B = B^0$，所以 $B^0 \cong C$。

定义 1.7.2 令 A 是一个有限长度的模，则 A 的长度 $\mathrm{Len}(A)=n$ 为任一个合成列的长度。

推论 1.7.2 令 $A \hookrightarrow M$，则 M 是有限长度的$\Leftrightarrow A$ 和 M/A 是有限长度的模。如果长度是有限的，则 $\mathrm{Len}(M)=\mathrm{Len}(A)+\mathrm{Len}(M/A)$。

例子：$\mathbb{Z}$－模$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ 有两个合成列：

$$0 \hookrightarrow 2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\ ,\ 0 \hookrightarrow 3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\ 。$$

第一个因子是

$$2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\ ,\ (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})/(2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\ 。$$

第二个因子是

$$3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}\ ,\ (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})/(3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\ 。$$

由此可知这两个链是同构的。

从下面的考虑，若尔当－赫尔德－施赖埃尔定理的意义是很清楚的，令 A 是一个有限长度的模，B 是 A 的任一子模，令 C 是 B 的极大子模，则 B/C 是 A 的合成因子(即合成列的因子)。

因此，考虑链 $0 \hookrightarrow C \hookrightarrow B \hookrightarrow A$，这可加细成一个合成列。没有子模可插进 C 和 B 之间，这是因为 C 是 B 的极大子模。因此，B/C 是 A 的一个合成因子。

在同构意义下，B/C 是 A 的唯一确定的有限多个合成因子中的一个。

习题 1.7

1. 证明本节推论 1.7.2。
2. 证明：如果 $B \cong C$ 成立，对某个固定的 i，若 $B_i=B_{i+1}$，则存在一个 j，使得若将 B_i 和 C_j 分别从 B 和 C 中略去，这两个链仍同构。
3. 确定$\mathbb{Z}/(30\mathbb{Z})$的所有合成列，并找出它们之中的所有同构。

1.8 模的同态环

由于环 R 上的模 A 的两个自同态 α，β 的合成 $\beta\alpha$ 仍是模 A 的自同态，并且，这个合成运算满足结合律。于是，容易证得下面的定理 1.8.1。

定理 1.8.1 环 R 上的模 A 的全体自同态集合 $\mathrm{Hom}_R(A,A)$ 在下面定义的加法和乘法下，构成一个有单位元的环。加法和乘法定义为 $(\alpha_1+\alpha_2)(a)=\alpha_1(a)+\alpha_2(a)$，

$(\alpha_1\alpha_2)(a)=\alpha_1\alpha_2(a)$，$\forall a\in A$，$\alpha_1$，$\alpha_2\in \mathrm{Hom}_R(A,\ A)$。

定义 1.8.1　定理 1.8.1 中给出的环叫作 A 的自同态环，记为 $\mathrm{End}(A_R)$。

例子：如果 $V=V_K$ 是一个向量空间，则 $\mathrm{End}(V_K)$ 是 V 到自身的线性变换环。

为了对任环 R，确定 $\mathrm{End}(R_R,\ R_R)$。为此，对一个固定的 $r_0\in R$，考虑映射

$$r_0^{(l)}:\ R\ni x\mapsto r_0x\in R$$

根据分配律和结合律，有 $r_0^{(l)}\in \mathrm{Hom}_T(R_R,\ R_R)$，其中 $\mathrm{Hom}_T(R_R,\ R_R)$ 表示 R_R 到 R_R 的同态全体。$r_0^{(l)}$ 是由 r_0 引出的左乘法。今令 $\varphi\in \mathrm{End}(R_R)$，$\forall x\in R$，因 $1\in R$，则

$$\varphi(x)=\varphi(1\cdot x)=\varphi(1)^{(l)}x,$$

i. e. $\varphi=\varphi(1)^{(l)}$。显然，$\mathrm{End}(R_R)$ 恰恰是由所有的左乘构成的，记为 $R^{(l)}=\mathrm{End}(R_R)$。

引理 1.8.1　映射 ρ：$R\ni r\mapsto r^{(l)}\in R^{(l)}$ 是一个环同构。

证明：对 r_1，r_2，$X\in R$，有

$$(r_1+r_2)^{(l)}(x)=(r_1+r_2)x=r_1x+r_2x=r^{(l)}x+r^{(l)}x=(r_1^{(l)}+r_2^{(l)})(x),$$

即：$(r_1+r_2)^{(l)}=r_1^{\,l}+r_2^{(l)}$。

$$(r_1r_2)^{(l)}(x)=(r_1r_2)(x)=r_1(r_2x)=r_1^{(l)}(r_2^{(l)}x)=(r_1^{(l)}r_2^{(l)})(x),$$

即：$(r_1r_2)^{(l)}=r_1^{(l)}r_2^{(l)}$。

因此，ρ 是一个环同态。

今令 $r_1x=r_2x$，对 $x=1$，则 $r_1=r_1\cdot 1=r_2\cdot 1=r_2$，从而 $r_1^{(l)}=r_2^{(l)}$。所以，$r_1=r_2$。因此，ρ 是单的。显然，ρ 是满的。

类似地，还可考虑 R 的右乘环 $R^{(r)}$，并且也有

$$R\cong R^{(r)}=\mathrm{End}(R_R)。$$

引理 1.8.2　令 A 和 B 是两个单模(R - 模)，则 A 和 B 的每个同态是 0 或同构。

引理 1.8.3　(舒尔引理)单模的自同态环是一个体。

再回到一般情形上来。已知一个模 A_R，令 $S=\mathrm{End}(A_R)$，在本书的记号里，自同态作用在 A 的左边，对 $\alpha\in S$，$a\in A$，$\alpha(a)$ 写为 αa，可证 A 是左 S - 模。由

$$\alpha(ar)=\alpha(a)r=(\alpha a)r,\ \alpha\in S,\ a\in A,\ r\in R$$

易知，A 是$(S,\ R)$ - 双模。以后要多次用到这个双模。在某些考虑中，$A_R, {}_SA, {}_SA_R$ 的结构起到很重要的作用。

习题 1.8

1. 证明引理 1.8.2 和引理 1.8.3。
2. 证明：对于每个向量空间 V_K，自同态环 $\mathrm{End}(V_K)$ 是正则的。正则环定义如下：

一个环 R 称作正则的，如果 $\forall r \in R$，$\exists r' \in R$，使得 $rr'r = r$。

1.9 正合列

设 R 是一个环，令

$$A = \cdots \xrightarrow{\alpha_{i-2}} A_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} A_i \xrightarrow{\alpha_i} A_{i+1} \xrightarrow{\alpha_{i+1}} \cdots$$

是右 R－模的同态序列，有限的或无限的(单边的或双边的)。例如，A 有形式

$$A = 0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\alpha_1} A_2 \xrightarrow{\alpha_2} A_3 \xrightarrow{\alpha_3} \cdots,$$

或

$$A = \cdots \xrightarrow{\alpha_{-4}} A_{-3} \xrightarrow{\alpha_{-3}} A_{-2} \xrightarrow{\alpha_{-2}} A_{-1} \longrightarrow 0,$$

或

$$A = 0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} W \longrightarrow 0。$$

定义 1.9.1 (1)序列 A 叫作复形:⇔对每个如同

$$A_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} A_i \xrightarrow{\alpha_i} A_{i+1}$$

的子列，$\mathrm{Im}(\alpha_{i-1}) \hookrightarrow \mathrm{Ker}(\alpha_i)$ 成立。

(2)序列(或复形)A 叫作正合的:⇔对每个形如的子列 $A_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} A_i \xrightarrow{\alpha_i} A_{i+1}$，$\mathrm{Im}(\alpha_{i-1}) = \mathrm{Ker}(\alpha_i)$。

(3)一个正合列叫作分裂正合列:⇔对每个子列 $A_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i-1}} A_i \xrightarrow{\alpha_i} A_{i+1}$，$\mathrm{Im}(\alpha_{i-1}) = \mathrm{Ker}(\alpha_i)$ 是 A_i 的直和项。

(4)形如 $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} W \longrightarrow 0$ 的正合列叫作短正合列。

(5)如果 A 是复形，则序列…，$\mathrm{Ker}(\alpha_i)/\mathrm{Im}(\alpha_{i-1})$，$\mathrm{Ker}(\alpha_{i+1})/\mathrm{Im}(\alpha_i)$，…，叫作 A 的同调，$\mathrm{Ker}(\alpha_i)/\mathrm{Im}(\alpha_{i-1})$ 叫作 A 的第 i 个同调模。

注：序列 A 是复形⇔$\alpha_i\alpha_{i-1} = 0$ 成立，这是因为 $\alpha_i\alpha_{i-1} = 0$⇔$\mathrm{Im}(\alpha_{i-1}) \hookrightarrow \mathrm{Ker}(\alpha_i)$。

为完整起见，全面地列出了上面的概念，但在本书中仅考虑短正合列。

首先，在下面短列

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} W \longrightarrow 0$$

中，因第一个映射 $0 \longrightarrow A$ 的映象是 0，$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} M$ 的正合性表明 f 是单的，由于最

后一个映射是映射 $W\longrightarrow 0$，从而核 = W。于是 $M\xrightarrow{g}W\longrightarrow 0$ 的正合性表明 g 是满态射，由 $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Ker}(g)$ 知：$M/\mathrm{Im}(f)\cong W$。如果 $A\hookrightarrow W$，则有短正合列

$$0\longrightarrow A\xrightarrow{l}M\xrightarrow{v}M/A\longrightarrow 0。$$

此处 l 是包含映射，v 是自然同态。

引理 1.9.1　令所有模是右 R - 模，所有同态是 R - 模同态，设图 1.7 是一个交换图，(i. e. $\mu f=h\alpha$；$\omega g=k\mu$ 成立)，且行是正合的，令 α，μ，ω 是单同态，则 μ 是同构当且仅当 α 和 ω 均是同构。

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & W & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\mu} & & \downarrow{\scriptstyle\omega} & & \\
0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{h} & N & \xrightarrow{k} & X & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

图 1.7

证明：首先令 μ 是一个同构，设 $b\in B$，则 $k(b)\in N$，从而 $\exists m\in M$ 使得 $\mu(m)=h(b)$。因此，$\omega g(m)=k\mu(m)=kh(b)=0$。由于 ω 是单的，故有 $g(m)=0$。因此，$m\in\mathrm{Ker}(g)=\mathrm{Im}(f)$。于是，$\exists a\in A$ 使 $f(a)=m$。因此，$h\alpha(a)=\mu f(a)=\mu(m)=h(b)$。于是，$h(\alpha(a)-b)=0$。由 h 是单射的，故 $\alpha(a)-b=0\Rightarrow\alpha(a)=b$，i. e. α 也是满的。因此，α 是同构。

令令 $x\in X$，则 $\exists n\in N$ 使 $k(n)=x$。于是，$\exists m\in M$，使 $\mu(m)=n$。因此，$\omega g(m)=k\mu(m)=k(n)=x$，所以 ω 同样是满的。因此，ω 为同构。

反之，令令 α 和 ω 是两个同构，$n\in N$ 已知，则存在 $w\in W$ 使 $\omega(w)=k(n)$。因此，存在 $m\in M$ 使 $g(m)=w$。于是，$k\mu(m)=\omega g(m)=\omega(w)=k(n)$。从而 $k(n-\mu(m))=0$。于是，存在 $b\in B$ 使 $h(b)=n-\mu(m)$。因此，$\exists a\in A$ 使 $\alpha(a)=b$。所以，$\mu f(a)=h\alpha(a)=h(b)=n-\mu(m)$，即 $\mu(f(a)+m)=b$。因此，μ 是满的。所以，μ 是一个同构。

这个证明是典型的图形追赶的例子。显然，没有图的概念，这个证明将是很难懂的。

现在把注意力转移到分裂短正合列上。令 $0\longrightarrow A\xrightarrow{f}M\xrightarrow{g}W\longrightarrow 0$ 是一个正合列。显然，子列 $0\longrightarrow A\xrightarrow{f}M$；$M\xrightarrow{g}W\longrightarrow 0$ 的分裂是已知的。所以，所给的正合列的分裂仅依赖于 $A\xrightarrow{f}M\xrightarrow{g}W$ 的分裂，i. e. 依赖于 $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Ker}(g)$ 是否为 M 的直和项。

引理 1.9.2　设 $A=0\longrightarrow A\xrightarrow{f}M\xrightarrow{g}W\longrightarrow 0$ 是一个短正合列，

(1) 下列命题等价：

①A 分裂；

②存在同态f_0：$M \longrightarrow A$ 使得 $f_0 \cdot f = I_A$；

③存在一个同态 g_0：$W \longrightarrow M$，使得 $gg_0 = I_W$。

(2)如果 A 分裂，则②、③中存在f_0 与 g_0，使得

$$0 \longleftarrow A \xleftarrow{f_0} M \xleftarrow{g_0} W \longleftarrow 0$$

是正合的并且是分裂的。

证明：

(1)①⇒②由推论 1.6.4 的①即可得证。

②⇒③由推论 1.6.4 的②即可得证。

(2)令 f_0：$M \longrightarrow A$ 满足 $f_0 \cdot f = I_A$。由推论 1.6.3，得 $M = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f_0) = \mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Ker}(f_0)$。因此，$g|_{\mathrm{Ker}(f_0)}$是一个同构。

令 h：$W \longrightarrow \mathrm{Ker}(f_0)$是逆同构，$l$：$\mathrm{Ker}(f_0) \longrightarrow M$ 是包含映射。设 $g_0 = lh$。由于 $M = \mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Ker}(f_0)$，$g$ 是满的，故 W 的每一个元素均可写成 $g(x)$，$x \in \mathrm{Ker}(f_0)$。于是，$gg_0g(x) = g(h(g(x))) = g(x)$。因此，$gg_0 = I_W$，$g_0g(x) = x$，故 $\mathrm{Im}(g_0) = \mathrm{Ker}(f_0)$，所以

$$0 \longleftarrow A \xleftarrow{f_0} M \xleftarrow{g_0} W \longleftarrow 0$$

是正合的，由于 $gg_0 = I_W$，$f_0 \cdot f = I_A$，故(1)分裂。

习题 1.9

1. 设 A_1，A_2，A'_1，A'_2是 R－模 A 的子模，且 $A'_1 \rightarrow A_1$，$A'_2 \rightarrow A_2$，证明：
$[A'_1 + (A_1 \cap A_2)]/[A'_1 + (A_1 \cap A'_2)] \cong [A'_2 + (A_1 \cap A_2)]/[A'_2 + (A_1 \cap A'_2)]$。

第2章 直积、直和、自由模

2.1 直积与直和

设$\{A_i \mid i\in I\}$是带有非空指标集I的一族集合，则$\{A_i \mid i\in I\}$之积$\prod\limits_{i\in I} A_i$是映射

$$\alpha: I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i(\alpha(i)\in A_i, \ \forall i)$$

的全体构成的集合。

首先介绍几个表示法：

(1)$a_i=\alpha(i)$叫作α的第i个分量。

(2)$(a_i)=(\alpha(i))=\alpha$。

因此，显然对(a_i)，$(a_i')\in\prod\limits_{i\in I} A_i$，有：

$$(a_i)=(a_i')\Leftrightarrow \forall i\in I \quad (a_i=a_i')。$$

I不一定非得可数，然而如果I是可数的，例如，$I=\{1, 2, 3, \cdots\}$，则可记

$$(a_1a_2a_3\cdots)=(a_i)=\alpha。$$

如果$A_i(i\in I)$是R－模，则按下面的定义2.1.1，$\prod\limits_{i\in I} A_i$构成模。

定义2.1.1 设(a_i)，$(b_i)\in\prod\limits_{i\in I} A_i$，$r\in R$，有

(1)加法：$(a_i)+(b_i)=(a_i+b_i)$。

(2)模乘法：$(a_i)r=(a_ir)$。

若仍记$\alpha=(a_i)$，$\beta=(b_i)$，则有

$$(\alpha+\beta)(i)=\alpha(i)+\beta(i), \ i\in I;$$

$$(\alpha r)(i)=\alpha(i)r, \ i\in I。$$

证明很明显，这里从略。特别是，$I\ni i\mapsto 0_i\in\prod\limits_{i\in I} A_i$，这个零映射是$\prod\limits_{i\in I} A_i$的零元，$0_i$是$A_i$的零元，$-\alpha_i=(-a_i)$是$\alpha=(a_i)$关于加法的负元。

定义 2.1.2 $\prod_{i\in I} A_i$ 的元素说是有限支撑的 :⇔ 只有有限多个 $i\in I$，使得 $a_i\neq 0$。

由子模的判别准则知，$\prod_{i\in I} A_i$ 的所有有限支撑的元素构成 $\prod_{i\in I} A_i$ 的一个子模。

定义 2.1.3

(1)如果$(A_i \mid i\in I)$是一族 R-模，则 R-模 $\prod_{i\in I} A_i$ 叫作$\{A_i \mid i\in I\}$的直积。

(2) $\prod_{i\in I} A_i$ 的全体有限支撑的元素构成的子模叫作 R-模族$\{A_i \mid i\in I\}$的外部直和，记为$\coprod_{i\in I} A_i$。

注： 如果 I 是有限的，则有 $\prod_{i\in I} A_i = \coprod_{i\in I} A_i$。

对$j\in I$，考虑下列映射：

$$\pi_j:\ \prod_{i\in I} A_i \ni (a_i)\mapsto a_j\in A_j,$$

$$\sigma:\coprod_{i\in I} A_i \ni (a_i)\mapsto (a_i)\in \prod_{i\in I} A_i,$$

$$\eta:\ A_j\ni a_j\mapsto a_j\in \coprod_{i\in I} A_i;$$

其中，$a_j(i)=\begin{cases}0, & i\neq j\\ a_j, & i=j\end{cases}$。易证下面的引理 2.1.1。

引理 2.1.1

(1)π_j 和 $\pi_j\sigma$ 是满同态；

(2)η_j 和 $\sigma\eta_j$ 是单同态；

(3)$\pi_k\sigma\eta_j=\begin{cases}1_{A_j}, & k=j\\ 0, & k\neq j\end{cases}$；

(4)$(\sigma\eta_j\pi_j)^2=\sigma\eta_j\pi_j$，$(\eta_j\pi_j\sigma)^2=\eta_j\pi_j\sigma$；

(5)如果 $I=\{1, 2, \cdots, n\}$，则

$$(\eta_j\pi_j)^2 = \eta_j\pi_j \wedge 1_{\prod A_i} = \sum_{j=1}^{n}\eta_j\pi_j。$$

定理 2.1.1 (1)对于 $\prod_{i\in I} A_i$ 和$\{\pi_i \mid i\in I\}$，则对每个 R-模 C 和同态族$\{\gamma_i \mid \gamma_i: C\longrightarrow A_i, i\in I\}$，都存在唯一的一个同态

$$\gamma:\ C\longrightarrow \prod_{i\in I} A_i;$$

使得 $\gamma_i=\pi_i\gamma$，$i\in I$。那么称($\prod_{i\in I} A_i$，$(\pi_i \mid i\in I)$)是 R-模族$\{A_i \mid i\in I\}$的积或直积。

(2)对于$\coprod_{i\in I} A_i$ 和$(\eta_i \mid i\in I)$，则对于每个 R-模和每个同态族$\{\beta_i \mid i\in I, A_i\longrightarrow B\}$，都存在唯一的一个同态，$\beta:\coprod_{i\in I} A_i\longrightarrow B$ 使得 $\beta_i=\beta\eta_i$，$i\in I$。那么称($\coprod_{i\in I} A_i$，$(\eta_i \mid$

$i\in I$))是 R－模族 $\{A_i \mid i\in I\}$ 的上积或直和。

证明：

(1)首先构造一个映射 γ：$C\longrightarrow\prod\limits_{i\in I}A_i$，令

$$\gamma(c)=(\gamma_i(c))\in\prod_{i\in I}A_i,\ c\in C;$$

则 γ 是同态，有

$$(\pi_j\gamma)(c)=\pi_j(\gamma(c))=\gamma_j(c),\ c\in C。$$

因此，$\gamma_j=\pi_j\gamma$，$j\in I$。

唯一性：令 γ'：$C\longrightarrow\prod\limits_{i\in I}A_i$，$\gamma_j(c)=(\pi_j\gamma(c))=\pi_j(\gamma'(c))$。于是，有 $\gamma'=(\gamma_i(c))=\gamma(c)$。因此 $\gamma'=\gamma$。

(2)先构造 β：$\bigsqcup\limits_{i\in I}A_i\longrightarrow B$，令

$$\beta((a_i))=\sum\beta_i(a_i)\in B。$$

此处只对有限个 $i\in I$ 具有 $a_i\neq 0$。由 $\bigsqcup\limits_{i\in I}A_i$ 的定义，和是有意义的，空指标集上的和永远置为 0。

显然，β 是同态，并且有 $(\beta\eta_j)(a_j)=\beta(a_j)=\beta_j(a_j)$。因此 $\beta_j=\beta\eta_j$，$j\in I$。

唯一性：假设还有 β'：$\bigsqcup\limits_{i\in I}A_i\longrightarrow B$ 使得 $\beta_j=\beta'\eta_j$，则有

$$\beta(a_j)=\beta_j(a_j)=\beta'\eta_j(a_j)。$$

由于 $\bigsqcup\limits_{i\in I}A_i$ 中每个元素是有限多个元素 a_j 的和，因此有 $\beta=\beta'$。

再引用一些符号。

$$A^I=\prod_{i\in I}A_i,\ A_i=A,\ (\forall i\in I);$$

$$A^{(I)}=\bigsqcup_{i\in I}A_i,\ A_i=A,\ (\forall i\in I)。$$

2.2　内部直和与外部直和之间的关系

第 1 章中引进了内直和的概念，上一节 2.1 讲了(外部)直和。现在证明这些概念在本质上是相同的，在同构意义下是一致的。

首先，有单同态

$$\eta_j:\ A_j\ni a_j\mapsto a_j'\in\bigsqcup_{i\in I}A_i,$$

式中，$a_j(i)=\begin{cases}0, & i\neq j\\ a_j & i=j\end{cases}$。令 $A'_j=\eta_j(A_j)$，则 A'_j是同构于 A_j 的一个模。

当 $I=\{1, 2, 3, \cdots, n\}$有限时，则有 $a'_j=\{0, \cdots, a_j, 0, \cdots, 0\}$，这里 a_j 在第 j 个位置，即 $A'_j=\{(0, \cdots, 0, a_j, 0, \cdots, 0) \mid a_j\in A_j\}$。

定理 2.2.1 令 $\{A_i \mid i\in I\}$ 是 R – 模族，则有

$$\coprod_{i\in I} A_i=\bigoplus_{i\in I} A'_i,\quad A_i\cong A'_i。$$

换句话说，A_i 的外直和等于 $\bigoplus\limits_{i\in I} A_i$ 的子模 A'_i的内直和。

证明： 由 A'_i的定义，有 $\sum\limits_{i\in I} A'_i\hookrightarrow \coprod\limits_{i\in I} A_i$。

令 $0\neq(a_i)\in\coprod\limits_{i\in I} A_i$，设 $a_{i_1}\neq0$，$a_{i_2}\neq0$，$\cdots$，$a_{i_n}\neq0$。对其他的 i，$a_i=0$。于是有

$$(a_i)\in A'_i+\cdots+A'_{i_n}。$$

因此，$\sum\limits_{i\in I} A'_i=\coprod\limits_{i\in I} A_i$。

令 $(a_i)\in A'_j\cap\sum\limits_{i\neq j, i\in I} A'_i \Rightarrow a_i=0, i\neq j$。有 $a_j=0\Rightarrow(a_i)=0$。于是 $\sum\limits_{i\in I} A'_i=\bigoplus\limits_{i\in I} A'_i$，即 $\coprod\limits_{i\in I} A_i=\bigoplus\limits_{i\in I} A'_i$。

注意：在以后，同构模 A_i 和 A'_i通常视为相同的，所以可用 A_i 代替 A'_i，而且根据定理 2.2.1，内直和与外直和的区别常常略去，两种情形均写作$\oplus A_i$，称之为直和。

2.3 直积与直和的同态

令 $\{A_i \mid i\in I\}$ 和 $\{B_i \mid i\in I\}$ 是两个 R – 模族，进一步地令 $\{\alpha_i \mid i\in I,\ \alpha_i:\ A_i\longrightarrow B_i\}$ 是同态族，则在这些假设下，得到以下 3 个引理。

引理 2.3.1 映射

$$\prod_{i\in I}\alpha_i:\prod_{i\in I} A_i\ni(a_i)\mapsto(\alpha_i(a_i))\in\prod_{i\in I} B_i$$
$$\bigoplus_{i\in I}\alpha_i:\bigoplus_{i\in I} A_i\ni(a_i)\mapsto(\alpha_i(a_i))\in\bigoplus_{i\in I} B_i$$

是同态，并且有

(1) $\prod\alpha_i$ 是单的 $\Leftrightarrow\oplus\alpha_i$ 是单的 $\Leftrightarrow\forall i\in I,\alpha_i$ 是单的；

(2) $\prod\alpha_i$ 是满的 $\Leftrightarrow\oplus\alpha_i$ 是满的 $\Leftrightarrow\forall i\in I,\alpha_i$ 是满的；

(3) $\prod\alpha_i$ 是同构的 $\Leftrightarrow\oplus\alpha_i$ 是同构的 $\Leftrightarrow\forall i\in I,\alpha_i$ 是同构的。

引理 2.3.2 假设条件同引理 2.3.1，进一步令

$$l_i:\mathrm{Ker}(\alpha_i)\ni a_i\mapsto a_i\in A_i$$

$$l'_i: \mathrm{Im}(\alpha_i) \ni b_i \mapsto b_i \in B_i, i \in I$$

则下列同态是同构：

$$\prod_{i\in I}\mathrm{Ker}(\alpha_i) \ni (a_i) \mapsto (l_i(a_i)) \in \mathrm{Ker}(\prod_{i\in I}\alpha_i),$$
$$\bigoplus_{i\in I}\mathrm{Ker}(\alpha_i) \ni (a_i) \mapsto (l_i(a_i)) \in \mathrm{Ker}(\bigoplus_{i\in I}\alpha_i),$$
$$\prod_{i\in I}\mathrm{Im}(\alpha_i) \ni (b_i) \mapsto (l_i'(b_i)) \in \mathrm{Im}(\prod_{i\in I}\alpha_i),$$
$$\bigoplus_{i\in I}\mathrm{Im}(\alpha_i) \ni (b_i) \mapsto (l_i'(b_i)) \in \mathrm{Im}(\bigoplus_{i\in I}\alpha_i)。$$

因此，有

$$\prod_{i\in I}\mathrm{Ker}(\alpha_i) \cong \mathrm{Ker}(\prod_{i\in I}\alpha_i),$$
$$\bigoplus_{i\in I}\mathrm{Ker}(\alpha_i) \cong \mathrm{Ker}(\bigoplus_{i\in I}\alpha_i),$$
$$\prod_{i\in I}\mathrm{Im}(\alpha_i) \cong \mathrm{Im}(\prod_{i\in I}\alpha_i),$$
$$\bigoplus_{i\in I}\mathrm{Im}(\alpha_i) \cong \mathrm{Im}(\bigoplus_{i\in I}\alpha_i)。$$

以上两个引理请读者自己证明。

引理 2.3.3　令$\{A_i \mid i \in I\}$和$\{B_j \mid j \in J\}$是已知R－模族，则

$$\mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{i\in I}A_i, \prod_{j\in J}B_j) \ni \varphi \mapsto \pi_j\varphi\eta_i \in \prod_{(i,j)\in I\times J}\mathrm{Hom}_R(A_i, B_j)$$

是群同构。

证明： 显然是群同态，剩下的证明如下：

(1)“单的”：令$0 \neq \varphi \in \mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{i\in I}A_i, \prod_{j\in J}B_j)$，则存在$(a_i) \in \bigoplus_{i\in I}A_i$，使得$\varphi((a_i)) \neq 0$。由于$(a_i) = \sum_{a_i\neq 0}a_i$，有$\varphi((a_i)) = \varphi(\sum a_i) = \sum\varphi(A'_i) \neq 0$。于是，存在$i$使得$\varphi(A'_i) = \varphi\eta_i(a_i) \neq 0$，从而存在$j$使$\pi_j\varphi\eta_i(a_i) \neq 0$，即$\pi_j\varphi\eta_i \neq 0$。

(2)“满的”：令$(\alpha_{ji}) \in \prod_{(i,j)\in I\times J}\mathrm{Hom}_R(A_i, B_j)$。对一个固定的$i \in I$和同态族$(\alpha_{ij} \mid j \in J)$，此处$\alpha_{ji}: A_i \longrightarrow B_j$，则由定理 2.1.1，存在一个同态$\beta_i: A_i \longrightarrow \prod_{j\in J}B_j$使得图 2.1 是交换的。

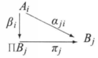


图 2.1

对同态族$(\beta_i \mid i \in I)$，由定理 2.1.1，则对应一个$\varphi: \oplus A_i \longrightarrow \prod B_j$，使图 2.2 是交换的。

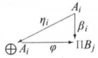


图 2.2

于是，$\alpha_{ji}=\pi_j\beta_i=\pi_j\varphi\eta_i$，从而结论得证。

特别情形：$\mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{i\in I}A_i,B)\cong\prod_{i\in I}{}_R(A_i,B)$，此处 $\varphi\mapsto\varphi(\eta_i)$，

$$\mathrm{Hom}_R(A,\prod_{j\in J})B_j\cong\prod_{j\in J}\mathrm{Hom}_R(A,B_j)\text{，此处 }\varphi\mapsto(\pi_i\varphi)\text{。}$$

习题 2.3

1. 证明引理 2.3.1 和引理 2.3.2。
2. 对于同态 α：$A\longrightarrow B$，证明下列叙述是等价的：

(1) $\mathrm{Ker}(\alpha)$ 是 A 的直和项，$\mathrm{Im}(\alpha)$ 是 B 的直和项。

(2) 存在一个同态 β：$B\longrightarrow A$ 使 $\alpha=\alpha\beta\alpha$。

3. 找出一族 R－模 $\{A_i\mid i\in I\}$ 和 R－模 M，使

$$\mathrm{Hom}_R(\prod_{i\in I}A_i,M)\ncong\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}_R(A_i,M)$$

$$\mathrm{Hom}_R(M,\bigoplus_{i\in I}A_i)\ncong\bigoplus_{i\in I}\mathrm{Hom}_R(M,A_i)$$

分别成立（$\ncong$ 意为作为加群不同构）。

2.4 自 由 模

引理 2.4.1 令 $F=F_R$，则下列条件是等价的：

(1) F 有基。

(2) $F=\bigoplus_{i\in I}A_i\wedge\forall i\in I$，$R_R\cong A_i$。

证明：首先，声明(1)、(2)对 $F=0$ 是成立的。事实上，空集 ϕ 作为基，而由习惯约定空集上的和为零，所以可以假定 $F\neq0$。

"(1)⇒(2)"：令 Y 是 F 的一个基，$a\in Y$，则

$$\varphi_a:\ R_R\ni r\mapsto ar\in R_R$$

显然是一个同态（满的）。进一步，由基的性质，$ar=0=a\cdot0\Rightarrow r=0$，这是一个同构。因此断言，$F=\bigoplus_{a\in Y}aR$。

因为 Y 是一个基，故 Y 也是生成集。所以，有 $F=\sum_{a\in Y}aR$。对 $a_0\in Y$，令

$$c\in a_0R\cap\sum_{a\in Y,a\neq a_0}aR,$$

则有不同的 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in Y$，$a_i\neq a_0$ 和 $r_0,r_1,\cdots,r_n\in R$ 具有性质

$$c = a_0 r_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i r_i \Rightarrow a_0 r_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i(-r_i) = 0。$$

因此，由基的性质知 $r_0 = r_1 = \cdots = r_n = 0$，从而 $a_0 R \cap \sum_{a \in Y, a \neq a_0} aR = 0$。所以 $F = \bigoplus_{a \in Y} aR$。

“(2)⇒(1)”：令 φ：$R_R \cong A_i$ 是假设存在的同构映射。因此断言 $\{\varphi_i(1) \mid i \in I\}$ 是 F 的基。由 $A_i = \varphi_i(R) = \varphi_i(1 \cdot R) = \varphi_i(1)R$，则有

$$F = \bigoplus_{i \in I} A_i = \bigoplus_{i \in I} \varphi_i(1)R。$$

因此，$\{\varphi_i(1) \mid i \in I\}$ 是 F 的生成元集。令 $I' \subset I$，I' 是有限的，且 $\sum_{i \in I'} \varphi_i(1) r_i = 0$ 对所有的 $i \in I'$，由引理 1.3.1，$\varphi_i(1) r_i = \varphi_i(r_i) = 0$。由于 φ_i 是同构，$r_i = 0$。因此，$\{\varphi_i(1) \mid i \in I\}$ 是 F 的基。

定义 2.4.1　满足引理 2.4.1 的条件的模 F 叫作自由模。

引理 2.4.2　令 I 是一个集，则 $R^{(I)}$ 是带有指标集 I 的基的自由模。

证明：考虑 $\{A_i \mid i \in I, A_i = R_R\}$，则由定理 2.2.1，有

$$R^{(I)} = \coprod_{i \in I} A_i = \bigoplus_{i \in I} A'_i,$$

且 $R_R = A_i \overset{\varphi_i}{\cong} A'_i$。如前所证，$R^{(I)}$ 是自由的，且有基 $\{\varphi_i(1) \mid i \in I\}$。

推论 2.4.1　每个模 M_R 是自由 R – 模的满同态像。如果 M_R 是有限生成的，则 M_R 是具有有限基的自由 R – 模的同态像。

证明：令 Y 是 M 的生成系，考虑自由模 $R^{(r)} = \bigoplus_{b \in Y} \varphi_b(1)R$，由 $R^{(r)} \ni \sum \varphi_b(1) r_b \mapsto \sum b r_b \in M$，根据 $R^{(r)}$，由基表示的唯一性，满同态是定义良好的。

一般地，用 $\{\varphi_i(1) \mid i \in I\}$ 记 $R^{(I)}$ 的基，但在下面将不局限于这个记法，也可用其他集来记。

定理 2.4.1　如果 φ：$A_R \to F_R$ 是满同态，F_R 是自由的，则 φ 分裂。

证明：令 Y 是 F_R 一个基，对每个 $b \in Y$，则选定一个 $a_b \in A$，满足 $\varphi(a_b) = b$，则映射

$$\varphi'\text{：} F \ni \sum b r_b \mapsto \sum a_b r_b \in A$$

是 R – 同态(因为 Y 是基)。因此，有

$$\varphi\varphi'\left(\sum b r_b\right) = \varphi\left(\sum a_b r_b\right) = \sum \varphi(a_b) r_b = \sum b r_b。$$

所以，$\varphi\varphi' = 1_F$，从而 $A = \operatorname{Im}(\varphi') \oplus \operatorname{Ker}(\varphi)$。

习题 2.4

1. 证明：非零环 R 是体⇔每个右 R – 模是自由的。

2. 证明：定理2.4.1对自由模的直和项也成立。

3. (1)证明：如果β: $B_R \to C_R$ 是满同态，若 φ: $F_R \to C_R$ 是同态，F_R 是自由模，则存在 φ': $F_R \to B_R$ 使 $\varphi = \beta\varphi'$。

(2)证明：如果用自由模的直和项代替本题(1)中的 F_R，则(1)也成立。

2.5 自由群和可除阿贝尔群

定义 2.5.1 一个加群 A 叫作可除的:$\Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{Z}$，$z \neq 0 \Rightarrow Az = A$，这里的$\mathbb{Z}$ 为整数环。

引理 2.5.1 可除群的每个满同态像是可除的，故可除群的商群是可除的。

证明：令 A 是可除的，设 φ: $A \to B$ 是满同态，则 $\forall z \in \mathbb{Z}$，$z \neq 0$，有

$$Bz = \varphi(A)z = \varphi(Az) = \varphi(A) = B_{\circ}$$

引理 2.5.2 可除群的直积与直和均是可除的。

证明：令$\{A_i \mid i \in I\}$是一族可除群。则对$0 \neq z \in \mathbb{Z}$，有

$$(\prod_{i \in I} A_i)z = \prod_{i \in I} A_i z = \prod_{i \in I} A_i$$

$$(\bigoplus_{i \in I} A_i)z = \bigoplus_{i \in I}(A_i z) = \bigoplus_{i \in I} A_i$$

例子：有理数加群$\mathbb{Q}$及$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$均是可除群，但$\mathbb{Z}$是不可除的。

定理 2.5.1 每个阿贝尔群可嵌入(即单射地映入)一个可除群内。

证明：令 A 是一个阿贝尔群(可视为右$\mathbb{Z}$-模)，由推论2.4.1，每个模都存在一个自由阿贝尔群 F 和一个满同态 φ: $F \to A$。若置 $\bar{x} = x + \mathrm{Ker}(\varphi)$，则

$$\varphi': F/\mathrm{Ker}(\varphi) \ni \bar{x} \mapsto \varphi(x) \in A$$

是一个同构。令 Y 是 $F = F\mathbb{Z}$（视 F 为右$\mathbb{Z}$-模，下同）的一个基，则考虑

$$D = \mathbb{Q}^{(Y)} = \bigoplus_{b \in Y} b\mathbb{Q}_{\circ}$$

由于$\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}} \cong b\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$，故 $b\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ 是可除的。由引理2.5.2，D 也是可除的。由于 $F = \bigoplus b\mathbb{Z}$，$F$ 是 D 的子群。因此，$\mathrm{Ker}(\varphi)$ 也是 D 的子群。由引理2.5.1知，$\overline{D} = D/\mathrm{Ker}(\varphi)$ 也是可除的。

令 i: $F/\mathrm{Ker}(\varphi) \ni \bar{x} \mapsto \bar{x} \in \overline{D}$ 是包含映射，那么，$i\varphi'^{-1}$ 就是所要求的 A 到可除群 $\overline{D}$ 的单射。

现在证明与定理2.4.1对偶的定理，即可除群是内射群。

定理 2.5.2 如果 φ: $D \to B$ 是一个单射且如果 D 是可除的，则 φ 分裂。

证明：由引理 2.5.1，$\mathrm{Im}(\varphi)$ 是可除的，因此不失一般性，可以将 D 视作 B 的子模。而 $\varphi = i$ 是包含映射。所以令

$$\Gamma = \{U \mid U \hookrightarrow B \land D \cap U = 0\}。$$

由于有 $U = 0 \in \Gamma$，故 $\Gamma \neq \phi$。进一步地，Γ 的每个全序集的开集仍属于 Γ。由佐恩引理，Γ 内存在一个极大元，仍记之为 U。于是，有

$$D + U = D \oplus U \hookrightarrow B。$$

剩下的是要证 $B = D \oplus U$。

对 B 的任一个元素 b，考虑$\mathbb{Z}$ 的满足 $bz \in D + U$ 的元素 z 构成的理想 $z_0\mathbb{Z}$ 。令 $cz_0 = d + u$，由于 D 是可除的，故 $\exists\, d_0$ 使 $d_0 z_0 = d$，从而$(b - d_0)z_0 = u$。显然 $z_0\mathbb{Z}$ 也是$\mathbb{Z}$ 的具有性质$(b - d_0 z) \in D + U$ 的元素构成的理想。因此断言，

$$D \cap [\,U + (b - d_0)\mathbb{Z}\,] = 0。$$

假设 $d_1 = u_1 + (b - d_0)z_1 \in D \cap [\,U + (b - d_0)\,]$，则$(b - d_0)z_1 = d_1 - u_1 \in D + U$。所以，$z_1 = z_0 t$，$t \in \mathbb{Z}$ 。因此，$(b - d_0)z_0 t = ut = d - u_1$。于是，$0 = d_1 - (u_1 + ut) \Rightarrow d_1 = 0$。由于 U 的极大性$\Rightarrow (b - d_0) \hookrightarrow U \Rightarrow b - d_0 \in U \Rightarrow b \in D + U$，得到 $B = D \oplus U$。

习题 2.5

1. 令 R 是带有商域 K 的整环，模 M 叫作可除的，如果对 R 中每个 $r \neq 0$ 成立 $Mr = M$，证明：

(1) 可除 R - 模类关于商模、直积与直和是封闭的。

(2) K_R 仅有的可除子模是 0 和 K。

(3) $R \neq K \Rightarrow$ 每个可除的循环 R - 模是 0。

2. 令 R 是整环，证明：

(1) M_R 是可除$\Leftrightarrow$对每个循环理想 $A \hookrightarrow R$ 和对每个同态 φ：$A_R \to M_R$，存在同态 φ'：$R_R \to M_R$，使得 $\varphi' \mid_A = \varphi$。

(2) 如果对一个固定的模 M_R 和任意模 N_R，每个同态 φ：$M_R \to N_R$ 分裂，则 M_R 是可除的。

3. (1) 令 T 是可除阿贝尔群

①证明：如果从 T 的生成元集 φ 去掉任意有限多个元素，则其余集仍是生成元集。

②证明 T 不含有极大子群。

(2) 证明不含有极大子群的阿贝尔群是可除的。

(3) 给出一个含有单子群的阿贝尔群的例子。

4. 对一个阿贝尔群 A，挠子群 $T(A)$ 定义如下：

$$T(A)=\{a \mid a\in A \wedge \exists z\in\mathbb{Z}\ (z\neq 0 \wedge az=0)\}。$$

证明：

(1)A 是可除的$\Rightarrow T(A)$是 A 的直和项。

(2)A 是可除的$\wedge T(A)=0\Rightarrow A$ 与若干个$\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ 的一个直和是$\mathbb{Z}$ -同构的。

提示：可将 A 当成$\mathbb{Q}$-向量空间。

2.6 主理想整环上的有限生成模

本节讨论左模。

令 M 是主理想整环 D 上的模，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是它的有限生成元集，于是，$M=\sum_{i=1}^{n}Dx_i$。为研究 M，很自然地要引进带有基底$(e_1, e_2, \cdots, e_n)$的自由模 $D^{(n)}$ 和 $D^{(n)}$到 M 上的满同态 η：$\sum_{i=1}^{n}a_ie_i\mapsto\sum_{i=1}^{n}a_ix_i$，$a_i\in D$。因此，$M=D^{(n)}/K$；其中，$K=\mathrm{Ker}(\eta)$。

定理 2.6.1 令 D 是主理想整环，$D^{(n)}$是 D 上秩为 n 的自由模，则 $D^{(n)}$的任一子模 K 是自由的，且 K 的基中所含元素个数 $m\leqslant n$。

证明：由于不排除 $K=0$，故采用通常的习惯将 0 模看作秩为 0 的自由模(基是空的)。当然，如果 $n=0$，结果是平凡的。现在假设 $n=1$，则 $D^{(1)}$与 D 等同，其任一子模 K 是一个理想。因此 $K=(f)$，如果 $f=0$，我们有 $K=0$，否则，$f\neq 0$。由于 D 是整环，对 $a\in D$，$af=0$ 蕴含着 $a=0$。因此，K 是带有基 f 的自由模。这就证明了 $n=1$ 时的结果。

现在假设 $n\geqslant 1$，对 n 使用归纳法。令$(e_1, e_2, \cdots, e_n)$是 $D^{(n)}$的基，$D^{(n-1)}$是由$(e_1, e_2, \cdots, e_{n-1})$生成的子模。因此，$D^{(n-1)}$是秩为 $n-1$ 的自由模，而 $D^{(n)}/D^{(n-1)}$是带有基 $\overline{e_1}=e_1+D^{(n-1)}$的自由模。令 $\overline{K}=(K+D^{(n-1)})/D^{(n-1)}$是 $D^{(n)}/D^{(n-1)}$的子模。如果 $\overline{K}=0$，$K+D^{(n-1)}=D^{(n-1)}$，则 $K\subset D^{(n-1)}$。于是，由归纳假设知 K 满足定理的结论。

接着，假设 $\overline{K}\neq 0$，则由上面证过 $n=1$ 的结果可知，$\overline{K}$ 有基 $\overline{f_1}=f_1+D^{(n-1)}$。而且，由于 $\overline{K}=(K+D^{(n-1)})/D^{(n-1)}$，能找到 $f\in K$。再将归纳假设应用到 $D^{(n-1)}$的子模 $K\cap D^{(n-1)}$上，如果 $K\cap D^{(n-1)}\neq 0$，则这个子模有基$(f_2, \cdots, f_m)$$(0<m-1\leqslant n-1)$。因此，$(f_2, \cdots, f_m)$是 K 的基。这是因为令 $y\in K$，$\overline{y}=y+D^{(n-1)}\in\overline{K}$，所以 $\overline{y}=b_1\overline{f_1}$，$b_1\in D$。这意味着$y-b_1f_1\in D^{(n-1)}$。由于选择 $f_1\in K$，$y-b_1f_1\in K$，因此 $y-b_1f_1\in K\cap D^{(n-1)}$。

所以 $y - b_1f_1 = b_2f_2 + \cdots + b_mf_m$。因此 $y = \sum_{j=1}^{m} b_jf_j$，故 $(f_1, \cdots, f_m)$ 生成 K。

其次，假设 $\sum_{j=1}^{m} b_jf_j = 0$，则 $b_1\overline{f_1} = -\sum_{k=2}^{m} b_k\overline{f_k} = 0$。所以 $b_1 = 0$。再因 $f_k(k \geqslant 2)$ 是 $K \cap D^{(n-1)}$ 的基，故由 $\sum_{k=2}^{m} b_kf_k = 0$，得 $b_k = 0$。因此 $(f_1, \cdots, f_m)$ 是 K 的基。如果 $K \cap D^{(n-1)} = 0$，同样的讨论证明 f_1 是 K 的基。

由于任一个域 F 是主理想整环，它的理想只有(0)和(1)，故根据前面的定理可导出线性代数熟知的结果。如果 V 是域 F 上 n 维向量空间，则它的任一子空间是有限维的，且维数 $\leqslant n$。

现在转到 $M \cong D^{(n)}/K$ 上，由定理 2.6.1 知 K 有所含元素的个数为 $m \leqslant n$ 的基。下面使用的方法对有限生成元也适用。因此，假设 K 有一组生成元 $f_1, f_2, \cdots, f_m$，此处 m 可超过 n。用基 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 将这些生成元表示为如下形式：

$$
\begin{aligned}
f_1 &= a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + \cdots + a_{1n}e_n \\
f_2 &= a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + \cdots + a_{2n}e_n \\
&\vdots \qquad \vdots \\
f_m &= a_{m1}e_1 + a_{m2}e_2 + \cdots + a_{mn}e_n
\end{aligned}
$$

此 $m \times n$ 矩阵 $A = (a_{ki})$ 称为生成元 $(f_1, f_2, \cdots, f_m)$ 关于基 $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ 的关系矩阵。当然，关于 $D^{(n)}$ 的基 (e_i) 和 K 的生成元集 (f_k) 没什么特殊选择。

今设 $(e'_1, \cdots, e'_n)$ 是 $D^{(n)}$ 的另一组基，则 $e'_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}e_j$，此处 $P = (p_{ij})$ 是矩阵环 $M_n(D)$ 上的可逆矩阵。但对于子模 K 的生成元集不能做这样的叙述。然而，容易看出，如果 $Q = (q_{kl})$ 是 $M_m(D)$ 中的可逆矩阵，其逆为 $Q^{-1} = (q^*_{kl})$，则 $(f'_1, \cdots, f'_m)$，此处 $f'_k = \sum_{l=1}^{m} q_{kl}f_l$ 是 K 的另一生成元集。这是因为，显然 $f'_k \in K$ 且 $\sum_K q^*_{rk}f'_k = \sum_{k,l} q^*_{rk}q_{kl}f_l = f_r$，所以 $(f_1, \cdots, f_m)$ 属于由 $(f'_1, \cdots, f'_m)$ 生成的子模内，因此 $(f'_1, \cdots, f'_m)$ 生成 K。那么 $(f_1, \cdots, f_m)$ 关于 $e'_1, \cdots, e'_n$ 的关系矩阵如何呢？由于有

$$f'_k = \sum q_{kl}f_l = \sum_{l,j} q_{kl}a_{lj}l_j = \sum_{l,j,i} q_{kl}a_{lj}p^*_{ji}e'_i;$$

此处，$(p^*_{ij}) = P^{-1}$。因此，新的关系矩阵为

$$A' = QAP^{-1}。$$

为了进一步研究 M，我们要用到下面的定理 2.6.2。

定理 2.6.2　如果 $A \in M_{mn}(D)$，D 是主理想整环，则 A 等价于下面的对角矩阵

$$\{d_1, d_2, \cdots, d_r, 0, \cdots, 0\} = \begin{bmatrix} d_1 & & & & & & 0 \\ & d_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

此处 $d_i \neq 0$，$d_i \mid d_j(i \leqslant j)$。

这里证明从略。

关于主理想整环 D 上有限生成模 M，有如下的基本结构定理。

定理 2.6.3 如果 M 是主理想整环 D 上的有限生成模，则 M 是循环模的直和，$M = Dz_1 \oplus Dz_2 \oplus \cdots \oplus Dz_s$，并且 z_i 的零化理想 $\mathrm{ann} z_i$ 序列满足

$$\mathrm{ann} z_1 \supset \mathrm{ann} z_2 \supset \cdots \supset \mathrm{ann} z_s, \ \mathrm{ann} z_k \neq 0。$$

注：如果 $b \in \mathrm{ann} z$，$b(az) = a(bz) = 0$，$\forall a \in D$；则有 $\mathrm{ann} az \supset \mathrm{ann} z$。这表示循环 D-模的任两个生成元有同一零化子。所以 $\mathrm{ann} z$ 与 Dz 的生成元 z 的选择无关。

证明：如果$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是 M 的一组生成元，则存在从具有基底$\{e_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$的自由模 $D^{(n)}$ 到 M 上的满同态 η，且 η：$e_i \to x_i$。因此 $M \cong D^{(n)}/K$，K 由 $f_1, \cdots, f_m$ 生成，且 $f_j = \sum a_{ji} e_i$。所以有关系矩阵 $A = \{(a_{ji}) \in M_{m,n}(D)\}$。今用$(e'_i)$代替基$(e_i)$，此处 $e'_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} e_j$，$P = (P_{ij})$是 $M_n(D)$中可逆矩阵。则$f'_1, \cdots, f'_m$代替生成元(f_k)，此处$f'_k = \sum_{l=1}^{m} q_{kl} f_l$，$Q = (q_{kl})$在 $M_m(D)$中可逆，故新的关系矩阵为 QAP^{-1}。由定理 2.6.2，可选择 P 和 Q，使

$$QAP^{-1} = \{d_1, \cdots, d_r, 0, \cdots, 0\}。$$

此处 $d_i \neq 0 (1 \leqslant i \leqslant r)$且 $d_i \mid d_j(i < j)$。此即意味着 K 的生成元f'_k与基(e'_i)的关系为

$$f'_1 = d_1 e'_1, \cdots f'_r = d_r e''_r, f'_{r+1} = \cdots = f'_m = 0。$$

置 $y_i = \sum p_{ij} x_j$，$1 \leqslant i \leqslant n$，则$(y_1, y_2, \cdots, y_n)$是 M 的另一生成元集，且为(e'_i)在 $D^{(n)}$ 到 M 上的满同态 η 下的像。对于 $1 \leqslant i \leqslant r$，$d_i e'_i = f'_i$，有 $d_i y_i = 0$。今假设有关系 $\sum b_i y_i = 0$，此处 $b_i \in D$。则 $\sum b_i e'_i \in K$，故有 $\sum b_i e'_i = \sum c_i f'_i = \sum c_i d_i e'_i$。因$(e'_1, e'_2, \cdots, e'_n)$是 $D^{(n)}$ 的基，故 $b_i = c_i d_i$，$1 \leqslant i \leqslant n$。但 $b_i y_i = c_i d_i y_i = 0$，因为已经证明了，如果 $\sum b_i y_i = 0$，则每个 $b_i y_i = 0$。所以，有

$$M = \sum Dy_i = Dy_1 \oplus Dy_2 \oplus \cdots \oplus Dy_n。$$

而且，还得到，如果 $b_i y_i = 0$，则 $b_i \in (d_i)$。由于 $d_i y_i = 0$，有 $\operatorname{ann} y_i = (d_i)$。由关于 d_i 的相除条件可知：

$$(d_1) \supset (d_2) \supset \cdots \supset (d_n)。$$

显然，若 d_i 是单位，则 $y_i = 0$。因此，这个元素可从 $\{y_1, \cdots, y_n\}$ 中去掉。假设 $(d_1, \cdots, d_t)$ 是单位，而 $(d_{t+1}, \cdots, d_n)$ 不是。令 $z_1 = y_{t+1}, \cdots, z_s = y_n$，此处 $s = n - t$，则有 $M = Dz_1 \oplus Dz_2 \oplus \cdots \oplus Dz_s$，此处每个 $Dz_j \neq 0$ 且定理 2.6.3 成立。

习题 2.6

1. 找出由 $f_1 = (1, 0, -1)$，$f_2 = (2, -3, 1)$，$f_3 = (0, 3, 1)$，$f_4 = (3, 1, 5)$ 生成的 $\mathbb{Z}^{(3)}$ 子模的基。
2. 确定 $\mathbb{Z}^{(3)}/K$ 的结构，此处 K 由 $f_1 = (2, 1, -3)$，$f_2 = (1, -1, 2)$ 生成。
3. 令 M 是由 2 和 x 在 $\mathbb{Z}[x]$ 内生成的理想，证明 M 不是循环 $\mathbb{Z}[x]$-模的直和。

2.7 推出与拉回

令 α: $A \to B$ 与 φ: $A \to M$ 是两个具有相同原像域（或称定义域）$\mathrm{Dom}(\alpha) = \mathrm{Dom}(\varphi)$ 的模同态。问：是否存在同态 ψ: $M \to N$ 与 β: $B \to N$ 使图 2.3 为交换图。并且这样的同态 ψ 与 β 及模 N 具有何种性质？本节就来研究这个问题，当然这里所考虑的模仍是右模。

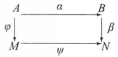


图 2.3

定义 2.7.1　对交换图 2.3，给出定义：

(1) 偶对 (ψ, β) 称为偶对 (α, β) 的推出 (push out) :⇔ 对每个满足 $\psi'\varphi = \beta'\alpha$ 的偶对 (ψ', β')（此处 ψ': $M \to X$ 及 β': $B \to X$），则存在唯一的 σ: $N \to X$ 使 $\psi' = \sigma\psi$ 与 $\beta' = \sigma\beta$ 成立。

(2) 偶对 (φ, α) 称为偶对 (ψ, β) 的拉回 (pull back) :⇔ 对每个满足 $\psi\varphi' = \beta\alpha'$ 的偶对 $(\varphi',$

$\alpha')$（此处 φ': $Y\to M$ 及 α': $Y\to B$），则存在唯一的 τ: $Y\to A$ 使成立 $\varphi'=\varphi\tau$ 与 $\alpha'=\alpha\tau$。

对应的图形分别如图2.4、图2.5所示：

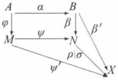


图2.4

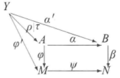


图2.5

命题2.7.1 对已给的偶对 (φ,α) 与 (ψ,β)，其推出与拉回在同构意义下分别是唯一的。

证明：令 (φ,β) 和 (ψ',β') 是 (φ,α) 的两个推出，于是存在 σ: $N\to X$ 及 ρ: $X\to N$ 使得 $\psi'=\sigma\psi$，$\beta'=\sigma\beta$ 及 $\psi=\rho\psi'$，$\beta=\rho\beta'$。对于 $\rho\sigma$: $N\to N$，有 $\psi=\rho\psi'=\rho\sigma\psi$，$\beta=\rho\beta'=\rho\sigma\beta$。所以，由定义中的唯一性知，$\rho\sigma=1_X$。对应地，得 $\sigma\rho=1_X$。因此，σ 与 ρ 是同构，且互为逆同构。类似地，可得到关于拉回的证明。

本节在下面用 (b,m) 记 $M\oplus B$ 中的元素，用 $\overline{(m,b)}$ 记 $(M\oplus B)/U$ 中的元素，U 的意义见下面的定理2.7.1。

定理2.7.1

(1)设有偶对 (φ,α)，这里 φ: $A\to M$ 与 α: $A\to B$。置 $N=(M\oplus B)/U$，其中，$U=\{(\varphi(a),-\alpha(a))\mid a\in A\}$。令 ψ: $M\ni m\mapsto\overline{(m,0)}\in N$，$\beta$: $B\ni b\mapsto\overline{(0,b)}$，则 (ψ,β) 是 (φ,α) 的推出。

(2)设有偶对 (ψ,β)，这里 ψ: $M\to N$ 与 β: $B\to N$，置 $A=\{(m,b)\mid m\in M\wedge b\in B\wedge\psi(m)=\beta(b)\}$，令 φ: $A\ni(m,b)\mapsto m\in M$，α: $A\ni(m,b)\mapsto b\in B$，则 (φ,α) 是 (ψ,β) 的拉回。

证明：

(1)首先，U 显然是 $M\oplus B$ 的子模，N 是 $M\oplus B$ 的商模，ψ 与 β 是满足 $\psi\varphi=\beta\alpha$ 的同态。令 ψ' 与 β' 如同定义2.7.1中给出的同态，定义 σ: $N\to X$ 为 $\sigma(\overline{(m,b)})=\psi'(m)+\beta'(b)$。为证 σ 是定义良好的，只需证明对任 $(m,b)\in U$，有 $\sigma\overline{(m,b)}=0$。事实上，由于 $\psi'\varphi=\beta'\alpha$，故 $\sigma(\overline{(\varphi(a),-\alpha(a))})=\psi'\varphi(a)-\beta'\alpha(a)=0$。从而，$\sigma$ 的定义是良好的。显然 σ 是同态且 $\sigma\psi=\psi'$ 与 $\sigma\beta=\beta'$ 成立。

下面证明 σ 是唯一的。

假设还有 σ_1: $N\to X$ 满足 $\psi'=\sigma_1\psi$ 与 $\beta'=\sigma_1\beta$。则 $(\sigma-\sigma_1)\psi=0$，$(\sigma-\sigma_1)\beta=0$，因此，有

$$0=(\sigma-\sigma_1)\psi(m)=(\sigma-\sigma_1)(\overline{(m,0)}),$$

$$0=(\sigma-\sigma_1)\beta(b)=(\sigma-\sigma_1)(\overline{(0,\ b)})。$$

由于 $\{\overline{(m,\ 0)},\ \overline{(0,\ b)}\mid m\in M\wedge b\in B\}$ 是 N 的生成元集，因此，$(\sigma-\sigma_1)$ 是零同态。于是，$\sigma-\sigma_1=0$，从而 $(\psi,\ \beta)$ 是 $(\varphi,\ \alpha)$ 的推出。

(2)设同态 α'：$Y\to B$ 与 φ'：$Y\to M$ 如同定义 2.7.1 中所给出的。令 τ：$Y\to A$，$\tau(y)=(\varphi'(y),\ \alpha'(y))$，对任 $y\in Y$。容易验证 τ 是同态，并且满足 $\alpha'=\alpha\tau$ 与 $\varphi'=\varphi\tau$。下面验证 τ 是唯一的。若还存在 τ_1：$Y\to X$ 使 $\alpha'=\alpha\tau$ 与 $\varphi'=\varphi\tau_1$。令 $(\tau-\tau_1)(y)=(m,\ b)$，则有

$$0=\varphi(\tau-\tau_1)(y)=\varphi(m,\ b)=m,$$
$$0=\alpha(\tau-\tau_1)(y)=\alpha(m,\ b)=b。$$

因此 $(\tau-\tau_1)(y)=0$，i. e. $\tau=\tau_1$，从而 $(\varphi,\ \alpha)$ 是 $(\psi,\ \beta)$ 的拉回。

关于推出与拉回的性质，有下面的两个定理。

定理 2.7.2　令 $(\psi,\ \beta)$ 是 $(\varphi,\ \alpha)$ 的推出，则有

(1) α 是单的 $\Rightarrow\psi$ 是单的；α 是满的 $\Rightarrow\psi'$ 是满的。φ 是单的 $\Rightarrow\beta$ 是单的；φ 是满的 $\Rightarrow\beta$ 是满的。

(2)令 α 是单同态。则 $\mathrm{Im}(\psi)$ 是 N 的直和项 $\Leftrightarrow\exists k$：$B\to N$ 使得 $\varphi=k\alpha$，即有图 2.6 所示关系成立。

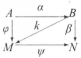


图 2.6

证明：

(1)若 α 是单态射。令 $\psi(m)=\overline{(m,\ 0)}=0$，则存在 $a\in A$ 使得 $(m,\ 0)=(\varphi(a),\ -\alpha(a))$。因此，$-\alpha(a)=0$，从而 $a=0$，即有 $m=\varphi(a)=0$，亦即 ψ 是单的。

若 α 是满的，令 $\overline{(m,\ b)}\in N$，则 $\exists a\in A$ 使 $b=-\alpha(a)$。所以，$\psi(m-\varphi(a))=\overline{(m-\varphi(a),\ 0)}=\overline{(m-\varphi(a),\ 0)}+\overline{(\varphi(a),\ -\alpha(a))}=\overline{(m,\ b)}$。因此，$\psi$ 也是满的。

类似可以证明关于 φ 的情形。

(2)若 $\mathrm{Im}(\psi)$ 是 N 的直和项，即 $N=\mathrm{Im}(\varphi)\oplus N_0$。由于 α 是单射，根据(1)，可知 ψ 也是单的。因 ψ 诱导出一个同构 ψ_0：$M\to\mathrm{Im}(\psi)$。令 π：$N\to\mathrm{Im}(\psi)$ 是由 $N=\mathrm{Im}(\psi)\oplus N_0$ 所产生的自然满射，则 $k=\psi_0^{-1}\pi\beta$ 满足 $k\alpha(a)=\psi_0^{-1}\pi\beta\alpha(a)=\psi_0^{-1}\pi\psi\alpha(a)=\psi_0^{-1}\pi\overline{(\varphi(a),\ 0)}=\varphi(a)$。

反之，令 k 为已知且 $\varphi=k\alpha$。则考虑 ζ：$N\ni\overline{(m,\ b)}\mapsto m+k(b)\in M$，由于 $\zeta(\overline{\varphi(a),\ -\alpha(a)})=\varphi(a)-k\alpha(a)=0$。故 ζ 是映射。容易验证 ζ 也是同态。由于

$\zeta\psi(m)=\zeta\overline{(m,0)}=m$，有 $\zeta\psi=1_M$。因此 $N=\mathrm{Im}(\psi)\oplus\mathrm{Ker}(\zeta)$。

定理 2.7.3 设(φ,α)是(ψ,β)的拉回，则

(1)β 是单的$\Rightarrow\varphi$ 是单的；β 是满的$\Rightarrow\varphi$ 是满的。φ 是单的$\Rightarrow\alpha$ 是单的；ψ 是满的$\Rightarrow$ α 是满的。

(2)设 ψ 是满同态，则 $\mathrm{Ker}(\alpha)$是 A 的直和项$\Leftrightarrow\exists k$：$B\to M$ 使得 $\beta=\psi k$。亦即有图 2.7 所示关系成立。

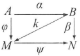


图 2.7

证明：由于证明与定理 2.7.2 完全类似，所以在这里简述其证明。

(1)设 ψ 是满的，令 $b\in B$，则 $\exists m\in M$ 使得 $\psi(m)=\beta(b)$。因此$(m,b)\in A$，且 $\alpha((m,b))=b$，i. e. α 是满的，其他情形可类似地证明得到。

(2)设 $\mathrm{Ker}(\alpha)$是 A 的直和项，从而 $A=\mathrm{Ker}(\alpha)\oplus A_0$，由于 ψ 是满的，故 α 也是满的。从而 $\alpha_0=\alpha|_{A_0}$ 也是满同态。令 i：$A_0\to A$ 是包含映射，则对 $k=\varphi i\alpha_0^{-1}$ 有：$\psi k(b)=\psi\varphi(\alpha_0^{-1}(b))=\beta\alpha(\alpha_0^{-1}(b))=\beta(b)$。

反之，令 k 连同 $\psi k=\beta$ 为已知。则对 η：$B\ni b\mapsto(k(b),b)\in A$，有 $\alpha\eta=1_B$，从而 $A=\mathrm{Ker}(\alpha)\oplus\mathrm{Im}(\eta)$。

第 3 章　内射模与投射模

在本章内，将介绍模论中两种最重要的模——内射模与投射模，它们在环与代数及同调代数中有着重要的应用。为研究内射模与投射模，引入了大子模和小子模以及子模的补的概念，并对它们的一些性质作了介绍。

3.1　大子模和小子模

定义 3.1.1

(1)模 M 的一个子模 A 叫作小子模(多余子模)，记为 $A \underset{\cdot}{\hookrightarrow} M$；或者叫大子模(本质子模)，记为 $A \overset{\cdot}{\hookrightarrow} M$:⇔

$$\forall U \hookrightarrow M \quad (A + U = M \Rightarrow U = M),$$

或

$$\forall U \hookrightarrow M \quad (A \cap U = 0 \Rightarrow U = 0)。$$

(2)环 R 的右理想、左理想、两边理想 A 叫作小的或大的 :⇔ A 是 $R_R, {}_RR, {}_RR_R$ 的小子模或大子模。

(3)同态 α 叫作小的或大的 :⇔ $\mathrm{Ker}(\alpha) \underset{\cdot}{\hookrightarrow} A$ 或 $\mathrm{Im}(\alpha) \overset{\cdot}{\hookrightarrow} B$。

由定义 3.1.1 可立即得到：

(1)$A \underset{\cdot}{\hookrightarrow} M \Leftrightarrow \forall U \not\hookrightarrow M$，$A + U \not\hookrightarrow M$。

(2)$A \overset{\cdot}{\hookrightarrow} M \Leftrightarrow \forall U \hookrightarrow M$，$U \neq 0$，$A \cap U \neq 0$。

(3)$M \neq 0 \wedge A \underset{\cdot}{\hookrightarrow} M \Rightarrow A \neq M$。

(4)$M \neq 0 \wedge A \overset{\cdot}{\hookrightarrow} M \Rightarrow A \neq 0$。

例子如下：

1. 对每个模 M，$0 \underset{\cdot}{\hookrightarrow} M$，$M \overset{\cdot}{\hookrightarrow} M$。
2. 一个模叫作半单的，如果每个子模都是它的直和项。

M 是半单的$\Rightarrow 0$ 是 M 的唯一小子模，M 是 M 的唯一的大子模。

证明： $A \hookrightarrow M \Rightarrow \exists U \hookrightarrow M$ 使得 $A \oplus U = M$。如果 $A \stackrel{*}{\hookrightarrow} M$，则 $U = M$。所以 $A = 0$。如果 $A \stackrel{*}{\hookrightarrow} M$，则 $U = 0$。所以 $A = M$。

(3)令 R 是一个局部环但不是体，A 是由 R 的非逆元全体构成的理想，则 $A \neq 0$(因 R 不是体)且 A 是 R 的最大的真左、右及两边理想(局部环的定义)，所以 A 分别是 R_R、${}_RR$ 及 ${}_RR_R$ 的大子模。

局部环的例子：$R = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$，$A = p\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$，$p$ = 素数。

下面根据定义来推导简单的结论。

引理 3.1.1 关于小子模，有如下性质：

(1) $A \hookrightarrow B \hookrightarrow M \hookrightarrow N$，且 $B \stackrel{\circ}{\hookrightarrow} M$，则 $A \stackrel{\circ}{\hookrightarrow} N$。

(2) $A_i \stackrel{\circ}{\hookrightarrow} M$，$i = 1, 2, \cdots, n \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} A_i \stackrel{\circ}{\hookrightarrow} M$。

(3) $A \stackrel{\circ}{\hookrightarrow} M \wedge \varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, N) \Rightarrow \varphi(A) \stackrel{\circ}{\hookrightarrow} N$。

(4)如果 α：$A \Rightarrow B$，β：$B \Rightarrow C$ 均是小满同态，则 $\beta\alpha$：$A \Rightarrow C$ 也是小满同态。

证明：

(1)令 $A + U = N$，其中 $U \hookrightarrow N$，则 $B + U = N$。于是，$B + (U \cap M) = M$(模律)。因此，$U \cap M = M \Rightarrow M \hookrightarrow U$，从而有 $A \hookrightarrow M \hookrightarrow U$。于是，$U = A + U = N$。故有 $A \stackrel{\circ}{\hookrightarrow} N$。

(2)对 n 进行归纳证明。对 $n = 1$，由假设，结论成立。归纳假设

$$A = A_1 + \cdots + A_{n-1} \stackrel{\circ}{\hookrightarrow} M_{\circ}$$

假设对 $U \hookrightarrow M$，有 $A + A_n + U = M \Rightarrow A_n + U = M$(因为 $A \stackrel{\circ}{\hookrightarrow} M$)。于是 $U = M$(因为 $A_n \stackrel{\circ}{\hookrightarrow} M$)。

(3)令 $\varphi(A) + U = N$，其中 $U \hookrightarrow N$，则对 $\forall m \in M$，有 $\varphi(m) = \varphi(a) + u$，其中 $a \in A$，$u \in U$。于是 $\varphi(m - a) = u \Rightarrow m - a \in \varphi^{-1}(U) \Rightarrow m \in A + \varphi^{-1}(U) \Rightarrow A + \varphi^{-1}(U) = M \Rightarrow M = \varphi^{-1}(U)$。由于 $A \stackrel{\circ}{\hookrightarrow} M \Rightarrow \varphi(M) = \varphi\varphi^{-1}(U) = U \cap \mathrm{Im}(\varphi)$，因此，$\varphi(A) \hookrightarrow \varphi(M) \hookrightarrow U$，所以 $U = \varphi(A) + U = N$。

(4)令 $\mathrm{Ker}(\beta\alpha) + U = A$，其中 $U \hookrightarrow A$。则由于 $\mathrm{Ker}(\beta\alpha) = \alpha^{-1}(\mathrm{Ker}(\beta))$，有 $\alpha(\mathrm{Ker}(\beta\alpha) + U) = \alpha(\mathrm{Ker}(\beta\alpha)) + \alpha(U) = \mathrm{Ker}(\beta) + \alpha(U) = \alpha(A) = B$。由假设，$\alpha(U) = B$。因此，$\mathrm{Ker}(\alpha) + U = A \Rightarrow U = A$，结论成立。

引理 3.1.2 对 $a \in M_R$，有：aR 不是 M 的小子模$\Leftrightarrow$存在 M 的一个极大子模 C，使 $a \notin C$。

证明：

"$\Leftarrow$"：如果 C 是 M 的不含有 a 的极大子模，则 $aR + C = M$。因此，aR 不是 M 的小子模。

"⇒"：利用佐恩引理来证明。令

$$\Gamma = \{B \mid B \overset{\neq}{\hookrightarrow} M \wedge aR + B = M\}。$$

由于 aR 不是 M 的小子模，故 $\exists B \in \Gamma$，i. e. $\Gamma \neq \varphi$。于是，Γ 中元素(子模)按子模的包含关系"$\hookrightarrow$"构成一个偏序集。

令 $\Lambda \neq \varphi$ 是 Γ 的一个全序子集，则 $B_0 = \bigcup_{B \in \Lambda} B$ 是 Λ 的一个上界。事实上，假设 $a \in B$，则 a 必含于一个 B 内，从而有 $aR \hookrightarrow B$。因此 $B = aR + B = M$，矛盾。由 $a \notin B_0$ 知，$B_0 \overset{\neq}{\hookrightarrow} M$。因为 $B \hookrightarrow B_0 \Rightarrow aR + B_0 = M$，所以 $B_0 \in \Gamma$，i. e. Λ 在 Γ 内有上界 B_0。于是，由佐恩引理知 Γ 含有一个极大元。

接下来，断言 C 是 M 的极大子模。令 $C \overset{\neq}{\hookrightarrow} U \hookrightarrow M \Rightarrow U \notin \Gamma$，这是因为 C 是 Γ 的极大元。由 $M = aR + C \hookrightarrow aR + U \hookrightarrow M \Rightarrow aR + U = M$。由于 $U \notin \Gamma$，故 $U = M$。

现在把注意力转向大子模，首先有与引理 3. 1. 1 对偶的叙述。

引理 3. 1. 3　设 N 是 R - 模，则

(1) $A \hookrightarrow B \hookrightarrow M \hookrightarrow N \wedge A \overset{\cdot}{\hookrightarrow} N \Rightarrow B \overset{\cdot}{\hookrightarrow} M$。

(2) $A_i \overset{\cdot}{\hookrightarrow} M$，$i = 1, 2, \cdots, n \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} A_i \overset{\cdot}{\hookrightarrow} M$。

(3) $B \overset{\cdot}{\hookrightarrow} N \wedge \varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, N) \Rightarrow \varphi^{-1}(B) \overset{\cdot}{\hookrightarrow} M$。

(4) 令 α：$A \to B$ 与 β：$B \to C$ 是大的单同态，其中 A，B，C 是 R - 模，则 $\beta\alpha$：$A \to C$ 也是大的单同态。

证明留给读者自己完成。

下面的大子模判别法对于应用是很重要的。

引理 3. 1. 4　令 $A \hookrightarrow M_R$，则有

$$A \overset{\cdot}{\hookrightarrow} M_R \Leftrightarrow \forall m \in M,\ m \neq 0,\ \exists r \in R \quad (mr \neq 0 \wedge mr \in A)。$$

证明：

"⇒"：由 $m \neq 0$，有 $mR \neq 0$，所以 $A \cap mR \neq 0$，从而就得到所要的结论。

"⇐"：令 $B \hookrightarrow M \wedge B \neq 0$，则存在 $m \in B$，$m \neq 0$，由条件存在 $r \in R$ 使 $mr \neq 0 \wedge mr \in A$。因此，$0 \neq mr \in A \cap B$，从而 $A \overset{\cdot}{\hookrightarrow} M$。

推论 3. 1. 1　令 $M = \sum_{i \in I} M_i$，$M_i \hookrightarrow M$，$A_i \overset{\cdot}{\hookrightarrow} M_i$，$\forall i \in I$；令

$$A = \sum_{i \in I} A_i = \bigoplus_{i \in I} A_i,$$

则有 $A \overset{\cdot}{\hookrightarrow} M$，并且 $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$。

证明： $A \overset{\cdot}{\hookrightarrow} M$：由于 M 中的每一个元素位于有限多个 M_i 的和内，由引理 3. 1. 4，只要对有限个集合 $I = \{1, 2, \cdots, n\}$ 证明结论成立即可。

对 n 进行归纳证明。当 $n = 1$ 时，结论由假设即知成立。归纳假设对 $n - 1$ 结论成

立，i. e. 假设

$$A_1+A_2+\cdots+A_{n-1}\overset{\cdot}{\hookrightarrow} M_1+\cdots+M_{n-1}。$$

令 $0\neq m_1+m_2+\cdots+m_{n-1}+m_n$，$m_i\in M_i$。如果 $m_1+m_2+\cdots+m_{n-1}=0$，则 $m=m_n\neq 0\Rightarrow$ $\exists r\in R$ 使 $0\neq mr=m_nr\in A_n$。所以，令 $m_1+m_2+\cdots+m_{n-1}\neq 0$。由归纳假设，$\exists r\in R$ 使得

$$0\neq(m_1+\cdots+m_{n-1})r\in A_1+\cdots+A_{n-1}。$$

如果这个 r，进一步地有 $m_nr=0$，则就完成了证明。因此，令 $m_nr\neq 0$，则 $\exists s\in R$ 使得 $0\neq m_nrs\in A_n$。于是，$mrs\in A_1+\cdots+A_n$。由于 A_i 的和是直和，因此有 $mrs\neq 0$，所以就证明了 $A\overset{\cdot}{\hookrightarrow} M$。

下面证明 $M=\bigoplus_{i\in I}M_i$：仍只需对有限集 $I=\{1,2,\cdots,n\}$ 的情形证明。假设 $0\neq$ $m_n=m_1+\cdots+m_{n-1}\in M_n\cap\sum_{i=1}^{n-1}M_i$，则存在 $r\in R$ 使得

$$0\neq(m_1+\cdots+m_{n-1})r\in\sum_{i=1}^{n-1}A_i。$$

因此，$0\neq m_nr=(m_1+\cdots+m_{n-1})r\in M_n\cap\sum_{i=1}^{n-1}A_i$。由引理 3.1.4，存在，$s\in R$ 使得 $0\neq m_nrs\in A_n$。于是，有

$$0\neq m_nrs=(m_1+m_2+\cdots+m_{n-1})rs\in A_n\cap\sum_{i=1}^{n-1}A_i。$$

这与假设矛盾。

推论 3.1.2 令 $M=\bigoplus_{i\in I}M_i$，$M_i\hookrightarrow M$，$A_i\overset{\cdot}{\hookrightarrow} M_i(\forall i\in I)$，则有 $A=\sum_{i\in I}A_i=\bigoplus_{i\in I}A_i$ 并且 $A\overset{\cdot}{\hookrightarrow} M$。

证明：由 $M=\bigoplus_{i\in I}M_i$ 及 $A_i\hookrightarrow M$ 得 $A=\bigoplus A_i$。于是，由推论 3.1.1 得 $A\overset{\cdot}{\hookrightarrow} M$。

推论 3.1.3 令 $M=\bigoplus_{i\in I}M_i$，$B\hookrightarrow M$，则下列条件是等价的：

(1) $\forall i\in I$，$B\cap M_i\overset{\cdot}{\hookrightarrow} M_i$。

(2) $\bigoplus_{i\in I}(B\cap M_i)\overset{\cdot}{\hookrightarrow} M$。

(3) $B\overset{\cdot}{\hookrightarrow} M$。

证明：

“(1)⇒(2)”：由推论 3.1.2 得证。

“(2)⇒(3)”：由于 $\bigoplus_{i\in I}(B\cap M_i)\overset{\cdot}{\hookrightarrow} M$，而且 $B\hookrightarrow M$，由引理 3.1.3，得证 $B\overset{\cdot}{\hookrightarrow} M$。

“(3)⇒(1)”：令 $0\neq m_i\in M_i$，由引理 3.1.4，存在 $r\in R$ 使得 $0\neq m_ir\in B$。但 $m_ir\in$ M_i，于是 $0\neq m_ir\in B\cap M_i$，因此条件(1)成立。

习题 3.1

1. 证明在自由$\mathbb{Z}$-模内，仅有一个平凡子模 0 是小子模。
2. 证明$\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$的每个有限生成子模是小子模。
3. 证明引理 3.1.3。
4. 令 $A \hookrightarrow B \hookrightarrow M$，证明：

(1) $B \overset{\cdot}{\hookrightarrow} M \Leftrightarrow B/A \overset{\cdot}{\hookrightarrow} M/A \wedge A \overset{\cdot}{\hookrightarrow} M$。

(2) $A \overset{\cdot}{\hookrightarrow} M \Leftrightarrow A \overset{\cdot}{\hookrightarrow} B \wedge B \overset{\cdot}{\hookrightarrow} M$。

3.2　加补与交补

本节将考虑两个模的直和的减弱。直和 $A \oplus B = M$ 由如下两个条件决定：

$$A + B = M,\ A \cap B = 0。$$

我们用补的定义来表示减弱这个概念。

定义 3.2.1　令 $A \hookrightarrow M$。

(1) $A^{\bullet} \hookrightarrow M$ 叫作 A 的加补 :⇔ ① $A + A^{\bullet} = M$，② $A^{\bullet}$ 是满足 $A + A^{\bullet} = M$ 的子模 $A^{\bullet}$ 中的极小者，i. e. $\forall B \hookrightarrow M$，$(A + B = M \wedge B \hookrightarrow A^{\bullet}) \Rightarrow B = A^{\bullet}$。

(2) A' 叫作 A 在 M 内的交补 :⇔ ① $A \cap A' = 0$，② A' 是满足 $A \cap A' = 0$ 的子模 A' 中的极大者，i. e. $\forall C \hookrightarrow M$，$(A \cap C = 0 \wedge A' \hookrightarrow C) \Rightarrow A' = C$。

推论 3.2.1　令 $A \hookrightarrow M$，$B \hookrightarrow M$，则 $A \oplus B = M \Leftrightarrow B$ 是 A 在 M 内的加补和交补。

现在出现这样两个问题，所定义的补存在吗？唯一吗？在 $A \oplus B = M$ 的情形里(M 和 A 固定)，B 在同构意义下一般是唯一的。关于定义 3.2.1 的补，这个结果不成立。尽管如此，后面还会得到某种意义下的唯一性。

现在考虑补的存在性问题。正如$\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$所表明的，加补不一定存在。事实上，令 n，$m \in \mathbb{Z}$，且 $(n, m) = 1$，则有 $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$。对 $n \neq 0$，$n \neq \pm 1$，$(n, q) = 1$，$q > 1 \Rightarrow (n, qm) = 1$ 而 $qm\mathbb{Z} \hookrightarrow m\mathbb{Z} \Rightarrow n\mathbb{Z}$ 不存在加补。

另一方面，有加补的模的例子也有很多。如阿廷模、半单模即是。与加补相反，交补总是存在的，而且还可以特殊的方式找出来。

引理 3.2.1　令 A，$B \hookrightarrow M$，并且 $A \cap B = 0$，则存在 A 的交补 A' 使得 $B \hookrightarrow A'$。因此，存在 A' 的交补 A'' 使得 $A \hookrightarrow A''$。

证明：利用佐恩引理。令

$$\Gamma = \{C \mid C \hookrightarrow M \wedge B \hookrightarrow C \wedge A \cap C = 0\}。$$

由于 $B \in \Gamma$，故 $\Gamma \neq \phi$。按子模的包含关系“$\hookrightarrow$”Γ 构成一个偏序集。因 Γ 内的每个全序子集的并集仍在 Γ 内，故 Γ 每个全序子集有上界。由佐恩引理，在 Γ 内存在极大元 A'。用 A'代替 A，A 代替 B，则知存在 A'的交补 A''且 $A \hookrightarrow A''$。

在小子模和加补，大子模和交补之间存在着重要的联系。因此有以下两个引理。

引理 3.2.2

(1)令 $M = A + B$，则 B 是 A 在 M 内的加补$\Leftrightarrow A \cap B \overset{\cdot}{\hookrightarrow} B$。

(2)如果 A' 是 A 在 M 内的加补，A'' 是 A' 在 M 内的加补，则 A' 也是 A'' 在 M 内的加补。

(3)如果 A' 是 A 在 M 内的加补，A'' 是 A' 在 M 内的加补且 $A'' \hookrightarrow A$，则有 $A/A'' \overset{\cdot}{\hookrightarrow} M/A''$。

证明：

(1)“$\Rightarrow$”：令 $U \hookrightarrow B$ 满足$(A \cap B) + U = B$。则 $M = A + B = A + (A \cap B) + U = A + U$。由于 B 是 A 的加补，故 $U = B$，从而 $A \cap B \overset{\cdot}{\hookrightarrow} B$。

“$\Leftarrow$”：令 $M = A + U$，$U \hookrightarrow B$，则 $B = (A \cap B) + U$。由于 $A \cap B \overset{\cdot}{\hookrightarrow} B$，故 $B = U$。因此，B 是 A 在 M 内的加补。

(2)由假设，有 $M = A'' + A'$。令 $U \hookrightarrow A'$ 且 $M = A'' + U$，则有 $A' = (A'' \cap A') + U$。由于 $M = A + A'$，我们得 $M = A + (A'' \cap A') + U$。由 $A'' \cap A' \overset{\cdot}{\hookrightarrow} A''$ 知，$A'' \cap A' \overset{\cdot}{\hookrightarrow} M$。于是得 $M = A + U$。由于 A' 是 A 的加补，$U \hookrightarrow A'$，故 $A' = U$。因此 A' 是 A'' 在 M 内的加补。

(3)令$(A/A'') + U/A'' = M/A''$，且 $A'' \hookrightarrow U \hookrightarrow M$，则 $A + U = M$。由于 $M = A'' + A'$，$A'' \hookrightarrow U$，进一步地，有 $U = A'' + (A' \cap U)$。因此，$M = A + U = A + A'' + (A' \cap U)$。由于 A' 是 A 的加补，于是有 $A' \cap U = A'$。因此 $A' \hookrightarrow U$。从而推得 $M = A'' + A' \hookrightarrow U \hookrightarrow M$。所以有 $U = M$，即 $U/A'' = M/A''$，此即为所证。

现在来看它的对偶。

引理 3.2.3

(1)令 A 和 B 是 M 的子模，且 $A \cap B = 0$，则有：B 是 A 在 M 内的交补$\Leftrightarrow (A + B)/B \overset{\cdot}{\hookrightarrow} M/B$。

(2)如果 A'是 A 在 M 内的交补，则 A'也是 A''在 M 内的交补。

(3)如果 A'是 A 在 M 内的交补，A''是 A'在 M 内的交补，且 $A \hookrightarrow A''$，则有 $A \overset{\cdot}{\hookrightarrow} A''$。

证明：

(1)“$\Rightarrow$”：令$(A + B)/[B \cap (U/B)] = 0$ 且 $B \hookrightarrow U \hookrightarrow M$，则有$(A + B) \cap U = B$。因

此，有 $A\cap U\hookrightarrow B$。于是 $A\cap U\hookrightarrow A\cap B$。由于 B 是 A 的交补，有 $A\cap B=0$。所以也有 $A\cap U=0$。又由于 $B\hookrightarrow U$，B 是 A 的交补$\Rightarrow B=U$，从而 $U/B=B/B=0$，此即说明$(A+B)/B\stackrel{\cdot}{\hookrightarrow}M/B$。

"$\Leftarrow$"：令 $A\cap U=0$，且 $B\hookrightarrow U\hookrightarrow M$。令 $x\in(A+B)\cap U$，则 $x=a+b=u$，其中 $a\in A$，$b\in B$，$u\in U$。因此，有 $a=u-b\in A\cap U$。所以 $a=0$，$x=b\in B$。于是$(A+B)\cap U=B$。从而$[(A+B)/B]\cap(U/B)=0$。由于$(A+B)/B\stackrel{\cdot}{\hookrightarrow}M/B$，故 $U/B=0$，即是说 $B=U$ 成立。因此，B 是 A 在 M 内的交补。

(2)由假设，有 $A''\cap A'=0$。令 $A'\hookrightarrow U\hookrightarrow M$ 且 $A''\cap U=0$。由$(A''+A')/A''\hookrightarrow M/A''$得 $A''+A'\stackrel{\cdot}{\hookrightarrow}M$(由引理 3.2.3)。令 $x\in(A''+A')\cap(A\cap U)$，则 $x=a''+a'=a=u$，其中 $a''\in A'',a'\in A'$，$a\in A$，$u\in U$。于是有 $a''=u-a'\in A''\cap U=0$，故 $a''=0$。从而 $x=a'=a\in A'\cap A=0$。因此有$(A''+A')\cap(A\cap U)=0$。由于 $A''+A'\stackrel{\cdot}{\hookrightarrow}M$，故 $A\cap U=0$。因为 A' 是 A 的交补，$A'\hookrightarrow U$，故 $A'=U$，此即为所证。

(3)令 $U\hookrightarrow A''$满足 $A\cap U=0$，对 $x\in A\cap(A'+U)$，有 $x=a=a'+u$，其中 $a\in A$，$a'\in A'$，$u\in U$。因此推得 $a-u=a'\in A''\cap A'=0$。因此 $x=a=u\in A\cap U=0$。故有 $A\cap(A'+U)=0$。从而 $A'+U=A'$。于是 $U\hookrightarrow A'$，又因 $U\hookrightarrow A''$，故 $U\hookrightarrow A''\cap A'=0$，从而 $U=0$。于是 $A\stackrel{\cdot}{\hookrightarrow}A''$。

习题 3.2

1. 令 $A\hookrightarrow B\hookrightarrow M$，证明：

(1)令 $A^{\cdot}$ 是 A 在 M 内的加补，则对 $T\hookrightarrow M$：$T\stackrel{\cdot}{\hookrightarrow}M\Rightarrow T\cap A^{\cdot}\stackrel{\cdot}{\hookrightarrow}A$。

(2)令 A'是 A 在 M 内的交补，则对 $T\hookrightarrow M$：$T\stackrel{\cdot}{\hookrightarrow}M\Rightarrow(T+A')/A'\stackrel{\cdot}{\hookrightarrow}M/A'$。

2. 令 A 和 B 是 M 的子模，

(1)证明：$A+B=M\wedge A\cap B\stackrel{\cdot}{\hookrightarrow}B\Rightarrow B$ 是 A 在 M 内的加补。

(2)证明：$A\cap B=0\wedge(A+B)/B\stackrel{\cdot}{\hookrightarrow}M/B\Rightarrow B$ 是 A 在 M 内的交补。

3. 证明：

(1)令 R 是交换环，$A\hookrightarrow R_R$，$A^{\cdot}$ 是 A 在 R 内的加补，则 $\exists B\hookrightarrow A$ 具有性质 $A^{\cdot}\oplus B=R$。

(2)如果 R 是整环，$A\stackrel{/}{\hookrightarrow}R_R$ 有加补，则 $A\stackrel{\cdot}{\hookrightarrow}R$。

3.3 内射模与投射模的定义及其简单性质

定理 3.3.1

(1)对于模 Q_R，下列命题是等价的：

①每个单同态

$$\zeta: Q \to B$$

分裂(i. e. $\mathrm{Im}(\zeta)$是 B 的直和项)。

②对每个单同态 $\alpha: A \to B$ 及同态 $\varphi: A \to Q$，存在一个同态 $\kappa: B \to Q$ 使得$\varphi = \kappa\alpha$。

③对每个单同态 $\alpha: A \to B$，

$$\mathrm{Hom}(\alpha, 1_Q): \mathrm{Hom}_R(B, Q) \to \mathrm{Hom}_R(A, Q)\gamma \mapsto 1_Q\gamma\alpha = \gamma\alpha$$

是满同态。

(2)对模 P_R，下列命题是等价的：

①每个满同态$\zeta: B \to P$ 分裂(i. e. $\mathrm{Ker}(\zeta)$是 B 的直和项)。

②对每个满同态$\beta: B \to C$，和每个同态 $\psi: P \to C$，∃一个同态 $\lambda: P \to B$，使得$\psi = \beta\lambda$。

③对每个满同态$\beta: B \to C$，

$$\mathrm{Hom}(1_P, \beta): \mathrm{Hom}_R(P, B) \to \mathrm{Hom}_R(P, C)\gamma \mapsto \beta\gamma 1_P = \beta\gamma$$

是一个满同态。

定理 3.3.1(1)中的②如图 3.1 所示，$\varphi = \kappa\alpha$：

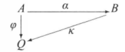


图 3.1

定理 3.3.1(2)中的②如图 3.2 所示：

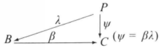


图 3.2

证明：

(1)"①⇒②"：令 $N = (Q \oplus B)/U$，此处 $U = \{(\phi(a), -\alpha(a)) \mid a \in A\}$。显然，

U 是一个子模，N 是模 $Q\oplus B$ 的商模。令

$$\psi:\ Q\ni m\mapsto\overline{(m,\ 0)}\in N,\ \beta:\ B\ni b\mapsto\overline{(0,\ b)}\in N,$$

则 ψ，β 显然是同态映射，且 $\psi\varphi=\beta\alpha$，即图 3.3 是交换的。

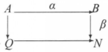


图 3.3

下面证明 ψ 是单的。设 $\psi(m)=\overline{(m,\ 0)}=0$，则存在 $a\in A$ 使得 $(m,\ 0)=(\varphi(a),\ -\alpha(a))$。于是 $\alpha(a)=0$。因 α 是单的，故 $a=0$。于是 $m=\varphi(a)=0$，即 ψ 是单的。由于 $\mathrm{Im}(\psi)$ 是 N 的直和项，故可设 $N=\mathrm{Im}(\psi)\oplus N_0$。因此，$\psi$ 诱导同构映射 ψ_0：$Q\to\mathrm{Im}(\psi)$。令 π：$N\to\mathrm{Im}(\psi)$ 是 $N=\mathrm{Im}(\psi)\oplus N_0$ 到 $\mathrm{Im}(\psi)$ 的投影映射，再令 $\kappa=\psi_0^{-1}\pi\beta$。则有

$$\kappa\alpha(a)=\psi_0^{-1}\pi\beta\alpha(a)=\psi_0^{-1}\pi\psi\varphi(a)=\psi_0^{-1}\pi\ \overline{(\varphi(a),\ 0)}=\varphi(a)。$$

即 $\varphi=\kappa\alpha$。

"②⇒①"：由假设，$\exists\kappa$：$B\to Q$，使图 3.4 交换，i. e. 有 $1_Q=\kappa\zeta$。因此 ζ 分裂(由推论 1.6.3 可得)。

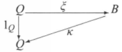


图 3.4

"②⇒③"：根据 $\mathrm{Hom}(\alpha,\ 1_Q)$ 的定义，③是②的等价形式。

(2)"①⇒②"：令 $A=\{(b,\ p)\mid b\in B\wedge p\in P\wedge\beta(b)=\psi(p)\}$。则 A 是 R－模。令 φ：$A\ni(b,\ p)\mapsto p\in P$，$\alpha$：$A\ni(b,\ p)\mapsto b\in B$，则 φ，α 是同态映射且 $\psi\varphi=\beta\alpha$，即图 3.5 是交换的。

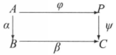


图 3.5

任 $p\in P$，则因 β 是满的，故 $\exists b\in B$ 使得 $\beta(b)=\psi(p)$。于是有 $(b,\ p)\in A$。因此，$\varphi(b,\ p)=p$，即 φ 是满的。由①知 $\mathrm{Ker}(\varphi)$ 是 A 的直和项，即 $A=\mathrm{Ker}(\varphi_0)$。由于 φ 是满的，故 $\varphi_0=\varphi\mid_{A_0}$ 也是满的。令 i：$A_0\to A$ 是包含映射，则令 $\lambda=\alpha_i\varphi_0^{-1}$，有

$$\beta\lambda(p)=\beta\alpha_i\varphi_0^{-1}(p)=\psi\varphi_i\varphi_0^{-1}(p)=\psi(p)。$$

即 $\psi=\beta\lambda$。

“②⇒①”：由假设，$\exists\lambda$：$P\to B$，使图 3.6 交换。

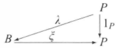


图 3.6

i. e. 有 $1_P=\zeta\lambda$。因此由推论 1.6.3 知 ζ 分裂。

“②⇒③”：等价变形。

定义 3.3.1

(1) 满足定理 3.3.1 中(1)的条件的模 Q_R 叫作内射 R-模。

(2) 满足定理 3.3.1 中(2)的条件的模 P_R 叫作投射 R-模。

推论 3.3.1

(1) Q 是内射模，并且 $Q\cong A\Rightarrow A$ 也是内射模。

(2) P 是投射模，并且 $P\cong C\Rightarrow C$ 也是投射模。

定理 3.3.2

(1) 令 $Q=\prod_{i\in I}Q_i$，则有：Q 是内射模$\Leftrightarrow\forall i\in I$($Q_i$ 是内射的)。

(2) 令 $P=\coprod_{i\in I}P_i$ 或 $P=\bigoplus_{i\in I}P_i$，则有：P 是投射模$\Leftrightarrow\forall i\in I$($P_i$ 是投射的)。

证明：

(1)“⇒”：令 Q 是内射的。设 α：$A\to B$ 是单同态，φ：$A\to Q_j(j\in J)$ 是同态，对 σ、η、φ，则由假设对应一个 ω：$B\to Q$，使得 $\sigma\eta_j\varphi=\omega\alpha$，则图 3.7 满足 $\varphi=\kappa\alpha$ 的所求同态为 $\kappa=\pi_j\overline{\omega}$。这是因为：$\varphi=1_{Q_j}\varphi=(\pi_j\sigma\eta_j)\varphi=\pi_j(\sigma\eta_j\varphi)=(\pi_j\omega)\alpha=\kappa\alpha$。

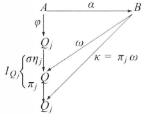


图 3.7

“⇐”：令单同态 α：$A\to B$ 和同态映射 φ：$A\to Q$ 已知。对每个 $\pi_i\varphi$，则 $\exists\kappa_i$ 使得 $\pi_i\varphi=\kappa_i\alpha$。由定理 2.1.1，$\exists\kappa$：$B\to Q$ 使 $\kappa_i=\pi_i\kappa$。因此断言 $\varphi=\kappa\alpha$。由 $\pi_i\varphi=\kappa_i\alpha$ 及 $\kappa_i=\pi_i\kappa$ 有 $\pi_i\varphi=\pi_i\kappa\alpha$。由定理 2.1.1(唯一性)，可知 $\varphi=\kappa\alpha$。

(2) 定理 3.3.2 中的(2)的证明留给读者。

习题 3.3

1. 证明定理 3.3.2 中的(2)。

3.4　投　射　模

在本节里，将对投射模做进一步的刻画。

定理 3.4.1　一个模是投射的$\Leftrightarrow$它同构于自由模的直和项。

证明：由定理 3.4.1，每个自由模是投射的。由上节 3.3，同构于自由模的直和项的模也是投射的。为证其逆，设 P 是一个投射模，令 ζ：$F\to P$ 是自由模 F 到 P 上的满同态。因 P 是投射模，故 ζ 分裂，$F=\mathrm{Ker}(\zeta)\oplus F_0$。于是 F_0 同构于 P。

对于这个定理，没有关于内射模的对偶定理。由这个定理，投射模的理论就简化为自由模及它的直和项的性质问题。众所周知，由于每个自由$\mathbb{Z}$-模的子模仍是自由的，于是得到以下推论。

推论 3.4.1　每个投射$\mathbb{Z}$-模是自由的。

对于投射模的研究，一个重要的引理就是对偶基原理，它在投射模理论中的地位类似于基在自由模理论中所处的地位。

定理 3.4.2　(对偶基引理)下列性质是等价的：

(1)P_R 是投射的。

(2)对于 P 在 R 上的每个生成元集$\{y_i \mid i\in I\}$，则 $\exists P^*=\mathrm{Hom}_R(P,\ R)$的子集$(\varphi_i \mid i\in I)$满足：

①$\forall p\in P$，仅对有限多个 $i\in I$ 成立 $\varphi_i(p)\neq 0$。

②$\forall p\in P$，$\left[p=\sum\limits_{\substack{i\in I\\ \varphi_i(p)\neq 0}} y_i\varphi(p)\right]$。

(3)存在子集$(y_i \mid i\in I,\ y_i\in P)$和$(\varphi_i \mid i\in I,\ \varphi_i\in P^*)$使①与②成立。

证明：

“(1)$\Rightarrow$(2)”：如 2.4 内所建立的，存在一个自由 R-模 F，具有基$\{x_i \mid i\in I\}$和满同态 ζ：$F\to P$ 使 $\zeta(x_i)=y_i$，令

$$\pi_j:\ F\ni \sum x_ir_i\to r_j\in R,\ j\in J。$$

(此处置 $r_j=0$，当 r_j 不在 $\sum x_j r_j$ 内出现时)，则当 $a=\sum x_i r_i \in F$ 且 $a\neq 0$ 时，对某个 $j\in I$，$\pi_j(a)\neq 0$，并且 $a=\sum x_i\pi_i(a)$。

由于 P 是投射的，存在 λ：$P\to F$，使得 $1_P=\zeta\lambda$。定义 $\varphi_i=\pi_i\lambda$，$i\in I$，则有 $\varphi_i\in P^*$，对 $p\in P$，有 $\varphi_i(p)=\pi_i\lambda(p)\neq 0$。只对有限多个 i 成立。进一步地，$\forall p\in P$，$p=\zeta\lambda(p)=\zeta(\sum x_i\pi_i(\lambda(p)))=\sum\zeta(x_i)\pi_i\lambda(p)=\sum y_i\varphi_i(p)$。因此，(1)与(2)成立。

"(2)⇒(3)"：显然。

"(3)⇒(1)"：由(2)，$(y_i\mid i\in I)$是 P 的生成元集，今令 ζ：$F\to P$ 是如同"(1)⇒(2)"证明中定义的满同态。进一步令 τ：$P\to F$，$\tau(p)=\sum x_i\varphi_i(p)$，则 τ 是映射，这是因为 $\varphi_i(p)$是唯一确定的。由①，仅有有限多个 $\varphi_i(p)\neq 0$，显然 τ 是 R－同态，于是有

$$\zeta\tau(p)=\zeta(\sum x_i\varphi_i(p))=\sum y_i\varphi_i(p)=p。$$

因此 $1_P=\zeta\tau$。i. e. ζ 分裂。由定理 3. 4. 1，P 是投射的。

习题 3. 4

1. 令 $0\neq e\neq 1$ 是环 R 的中心的幂等元($e=e^2$)，证明：右 R－模 eR 是投射的，但不是自由的。

2. 令 β_1：$P_1\to M$ 与 β_2：$P_2\to M$ 是满同态，P_1，P_2 是投射模，证明：

$$P_1\oplus \mathrm{Ker}(\beta_2)\cong P_2\oplus \mathrm{Ker}(\beta_1)。$$

3. 令 R 是具有商域 $K\neq R$ 的整环，证明：

(1) $\mathrm{Hom}_R(K,R)\neq 0$。

(2) K_R 不是投射的。

(3) 如果投射模 P_R 具有有限生成大子模，则 P 本身是有限生成的。

(4) 每个投射理想(作为 R－模)是有限生成的。提示：对题(3)使用对偶基原理。

3. 5　内　射　模

一般地，用"内部"性质刻画内射模的特征是不可能像投射模的情形中那样简单。

但对 $R=\mathbb{Z}$，这样的特征还是存在的。这对任意环 R 是很有意义的，事实上，可用它来证明内部扩张的存在性。

定理 3.5.1 一个$\mathbb{Z}$-模(i.e. 阿贝尔群)是内射的当且仅当它是可除的。

证明：令 $D_{\mathbb{Z}}$ 是可除的，则由定理 2.5.2 知，D 是内射的，今令 $Q_{\mathbb{Z}}$ 是内射的，令 $q_0\in Q$，$0\neq z_0\in\mathbb{Z}$，如果考虑同态，如图 3.8 所示，此处的 i 是包含映射，φ 的定义是：$\varphi(z_0)=q_0$。由于 Q 是内射的，故存在 κ，使 $\varphi=\kappa i$。因此有 $\kappa(1)z_0=\kappa(1\cdot z_0)=\kappa(z_0)=(\kappa i)(z_0)=\varphi(z_0)=q_0$。由于 $q_0\in Q$ 是任意的，于是 $Q_{z_0}=Q$，i.e. Q 是可除的。

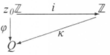


图 3.8

现在仍令 R 是任意一个环。由于每个模是自由 R-模的满同态像，而每个自由 R-模均是投射的，所以每个模是投射 R-模的满同态像。现在考虑它的对偶问题，希望证明每个模可单一地映入内射模内。

引理 3.5.1 如果 D 是可除的(i.e. 内射的)$\mathbb{Z}$-模，则 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$ 是内射右 R-模。

证明：令 α：$A\to B$ 是一个 R-单同态，φ：$A\to\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$ 是一个 R-同态，令 σ 是如下定义的一个$\mathbb{Z}$-同态。

$$\sigma:\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)\ni f\mapsto f(1)\in D。$$

则考虑图 3.9

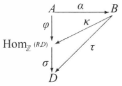


图 3.9

如果只把 α，φ 看作$\mathbb{Z}$-同态，则因 D 是内射的，存在一个$\mathbb{Z}$-同态 τ：$B\to D$，使得 $\sigma\varphi=\tau\alpha$。今令 κ：$B\to\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$ 有如下定义：

$$\kappa(b)(r)=\tau(br),\ b\in B,\ r\in R。$$

则对固定的 $b\in B$，显然 $\kappa(b)\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$，有

$$\kappa(br_1)(r)=\tau(br_1r)=\kappa(b)(r_1r)=(\kappa(b)r_1)r。$$

i.e. $\kappa(br_1)=\kappa(b)r_1$。因此，$\kappa$ 是一个 R-同态，所以有

$$\kappa\alpha(a)r=\tau(\alpha(a)r)=\tau(\alpha(ar))=\tau\alpha(ar)=\sigma\varphi(ar)$$
$$=\varphi(ar)(1)=(\varphi(a)r)(1)=\varphi(a)(r)。$$

所以 $\kappa\alpha=\varphi$。

定理 3.5.2 每个模都可以嵌入到一个内射模中。换言之，存在从这个模到某个内射模的单同态。

证明： 令 M_R 已知，由定理 2.5.1，存在$\mathbb{Z}$－单同态 μ：$M\to D$（D 是可除阿贝尔群）。由引理 3.5.1，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D_R)$是内射 R－模。若令

$$\rho:M\to\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,D),$$
$$\rho(m)(r)=\mu(mr),\ m\in M,\ r\in R;$$

则 ρ 显然是一个 R－同态。由于 μ 是单的，故 ρ 是单同态。

推论 3.5.1 Q_R 是内射的$\Leftrightarrow Q_R$ 同构于形如 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$的模的一个直和项，这里 D 是可除阿贝尔群。

证明请读者自己完成。

推论 3.5.1 可看作是内射模的“内部特征”。

推论 3.5.2 每个模是内射模的子模。

下面把它的证明陈述为一个独立的引理。

引理 3.5.2 令 ρ：$M_R\to N_R$ 是一个单同态，则存在一个模 N' 使 $M\hookrightarrow N'$ 和存在一个同构 τ：$N'\to N$，使 $\rho=\tau i$，此处 i 是 M 到 N' 内的包含映射。

证明： 令 D 是这样一个集，其基数与 $\rho(M)$ 在 N 内的补集 $N\setminus\rho(M)$ 的基数相同，且 $D\cap M=\varphi$。令 β：$D\to N\setminus\rho(M)$ 是一个单射，则定义一个集 $N'=M\cup D$，令 τ：$N'\to N$ 是以如下形式定义的双射：

$$\tau(m)=\rho(m),\ m\in M;$$
$$\tau(d)=\beta(d),\ d\in D。$$

为使 N' 成一个含有 M_R 的 R－模和使 τ 成一个 R－模同态，置

$$x+y=\tau^{-1}(\tau(x)+\tau(y)),\ x,\ y\in N';$$
$$xr=\tau^{-1}(\tau(x)r),\ r\in R。$$

则马上看出，所有的结论均成立。

由于 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, D)$ 和同构于它的模 N' 均是内射的，推论 3.5.2 由引理 3.5.2 得出。

习题 3.5

1. 在$\mathbb{Z}$－模族中证明：

(1) 如果 P 是投射的(i. e. 自由的)，且 A 和 B 是 P 的两个直和项，则 $A\cap B$ 也是 P

的直和项。

(2) 如果 Q 是内射的(i. e. 可除的)，且 A，B 是 Q 的两个直和项，则 $A+B$ 也是 Q 的直和项。

2. 证明：模 P 是投射的当且仅当对每个满同态 β：$Q\to C$(Q 是内射的)和对每个同态 φ：$P\to C$，存在一个同态 φ'：$P\to Q$，使 $\varphi=\beta\varphi'$。

3.6　内射包与投射盖

现在已经看见，每个模既可以单一地映入一个内射模内，又是一个投射模的同态像。现在提出这样一个问题，是否在某种情况下，存在这样的最小子模。

定义 3.6.1　令 M_R 已知：

(1) 一个单同态 η：$M\to Q$ 叫作 M 的内射包 :⇔ Q 是内射的，且 η 是大单同态。

(2) 一个满同态 ζ：$P\to M$ 叫作 M 的投射盖 :⇔ P 是投射的且 ζ 是小满同态。

如果 η：$M\to Q$ 是内射包，那么在不引起误解的情况下，简单地把 Q 叫作 M 的内射包，而不写出 η，同样对投射盖也这样的理解。

有了这个解释，记 M 的内射包为 $I(M)$，M 的投射盖为 $P(M)$。然而，我们指出 $I(M)$ 和 $P(M)$ 在同构定义下是唯一确定的。

例子：$\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}\xrightarrow{i}Q_{\mathbb{Z}}$ 是$\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ 的内射包，这里的 Q 是有理数域。因为 i 是单同态，$Q_{\mathbb{Z}}$ 是内射的，由引理 3. 1. 4，$\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ 是 $Q_{\mathbb{Z}}$ 的大子模。

推论 3.6.1

(1) 如果 η_i：$M_i\to Q_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 是 M_i 的内射包，则

$$\bigoplus_{i=1}^{n}\eta_i:\bigoplus_{i=1}^{n}M_i\longrightarrow\bigoplus_{i=1}^{n}Q_i$$

是$\bigoplus_{i=1}^{n}M_i$ 的内射包。

(2) 如果 ζ_i：$P_i\to M(i=1, 2, \cdots, n)$ 是 M_i 的投射盖，则

$$\bigoplus_{i=1}^{n}\zeta_i:\bigoplus_{i=1}^{n}P_i\longrightarrow\bigoplus_{i=1}^{n}M_i$$

是$\bigoplus_{i=1}^{n}M_i$ 的投射盖。

证明请读者自己完成。

现在的问题是：内射包和投射盖的存在性和唯一性。这可以从唯一性入手，下面证明较一般的结果。

定理 3.6.1

(1) 令 φ：$M_1\to M_2$ 是一个同构，η_1：$M_1\to Q_1$ 是一个内射包，η_2：$M_2\to Q_2$ 是一个

单同态，Q_2 是内射的，那么存在一个分裂单同态 ψ：$Q_1 \to Q_2$ 使得图 3. 10 是交换的，

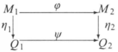


图 3. 10

而且

$$\tilde{\eta}: M_2 \ni m \mapsto \eta_2(m) \in \mathrm{Im}(\psi)$$

是 M_2 的内射包，η_2 是 M_2 的内射包 $\Leftrightarrow \psi$ 是一个同构。

(2)令 φ：$M_1 \to M_2$ 是一个同构，ζ_1：$P_1 \to M_1$ 是一个满同态，P 是投射的，令 ζ_2：$P_2 \to M_2$ 是投射盖，则存在一个分裂满同态

$$\psi: P_1 \to P_2$$

使得图 3. 11 是交换的。

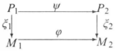


图 3. 11

如果 $P_1 = \mathrm{Ker}(\psi) \oplus P_0$（注意：$P_0 \cong P_1 / \mathrm{Ker}(\psi)$），$\hat{\zeta_1} = \zeta_1 \mid_{P_0}$ 是 M_1 的投射盖，ζ_1 是 M_1 的投射盖 $\Leftrightarrow \psi$ 是同构。

证明：

(1)由于 Q_Z 是内射的，故存在 ψ 使得图 3. 12 交换。

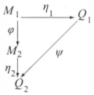


图 3. 12

由于 $\eta_2\varphi = \psi\eta_1$ 是同态，故 $\mathrm{Ker}(\psi) \cap \mathrm{Im}(\eta_1) = 0$。由于 $\mathrm{Im}(\eta_1)$ 是 Q_1 的大子模，因此 $\mathrm{Ker}(\psi) = 0$，i. e. ψ 是单同态。由于 Q_1 是内射的，故 ψ 是分裂的。所以 $\mathrm{Im}(\psi)$ 是内射的。

由于 $\mathrm{Im}(\eta_2) \hookrightarrow \mathrm{Im}(\psi)$，故 $\tilde{\eta}_2$ 的定义是有意义的，$\tilde{\eta}_2$ 及 η_2 是单的，并且 $\mathrm{Cod}(\tilde{\eta}_2) = \mathrm{Im}(\psi)$ 是内射的。剩下的是证明 $\mathrm{Im}(\tilde{\eta}_2) = \mathrm{Im}(\eta_2) \hookrightarrow \mathrm{Im}(\psi)$。令

$$\tilde{\psi}: Q_1 \ni q \mapsto \psi(q) \in \mathrm{Im}(\psi)。$$

则 $\tilde{\psi}$ 是同构，因而有

$$\tilde{\psi}\eta_1(M_1) = \tilde{\eta}_2\varphi(M_1) = \tilde{\eta}_2(M_2)。$$

由于 $\eta_1(M_1) \hookrightarrow Q_1$，于是由引理 3.1.3 的(3)($\varphi = \psi^{-1}$)知 $\tilde{\eta}_2(M_2) \hookrightarrow \mathrm{Cod}(\tilde{\psi}) = \mathrm{Im}(\psi)$。

如果 η_2 是 M_2 的内射包，则 $\mathrm{Im}(\eta_2) \hookrightarrow Q_2$。由于 $\mathrm{Im}(\eta_2) \rightarrowtail \mathrm{Im}(\psi)$，于是有 $\mathrm{Im}(\psi) \hookrightarrow Q_2$。然而，由于 $\mathrm{Im}(\psi)$ 是 Q_2 的直和项，因此唯一的可能就是 $\mathrm{Im}(\psi) = Q_2$，i. e. ψ 是同构的。反之，如果 ψ 是同构，则 $\eta_2 = \tilde{\eta}_2$。因此，η_2 是 M_2 的内射包。

(2)由于 P_1 是投射的，故存在 ψ 使得图 3.13 是交换的。

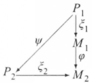


图 3.13

由于 $\varphi\zeta_1 = \zeta_2\psi$ 是满同态，故有 $\mathrm{Im}(\psi) + \mathrm{Ker}(\zeta_2) = P_2$。因为 $\mathrm{Ker}(\zeta_2) \hookrightarrow P_2$，所以 $\mathrm{Im}(\psi) = P_2$，i. e. ψ 是满同态。由于 P_2 是投射的，故 ψ 分裂，从而 $P_1 = \mathrm{Ker}(\psi) \oplus P_0$。于是 $P_0 \cong P_1/\mathrm{Ker}(\psi)$ 是投射的。

由于 $\mathrm{Ker}(\psi) \rightarrowtail \mathrm{Ker}(\zeta_1)$，$\hat{\zeta}_1 := \zeta_1|_{P_0}$ 是满同态。由于 P_0 是投射的，因此剩下要证明的是 $\mathrm{Ker}(\hat{\zeta}_1) \hookrightarrow P_1$。令

$$\hat{\psi}: P_0 \ni p \mapsto \psi(p) \in P_2。$$

则 $\hat{\psi}$ 是同构，由于 $\varphi\hat{\zeta}_1 = \zeta_2\hat{\psi}$，$\varphi$ 与 $\hat{\psi}$ 均是同构，故有 $\mathrm{Ker}(\hat{\zeta}_1) = \hat{\psi}^{-1}(\mathrm{Ker}(\zeta_2))$。因为 $\mathrm{Ker}(\zeta_2) \hookrightarrow P_2$。由引理 3.1.1 的(3)，$\mathrm{Ker}(\hat{\zeta}_1) \hookrightarrow \hat{\psi}^{-1}(P_2) = P_0$。

如果 ζ_1 是 M_1 的投射盖，则 $\mathrm{Ker}(\zeta_1) \hookrightarrow P_1$ 成立。由于 $\mathrm{Ker}(\psi) \rightarrowtail \mathrm{Ker}(\zeta_1)$，于是 $\mathrm{Ker}(\psi) \hookrightarrow P_1$。然而，由于 $\mathrm{Ker}(\psi)$ 是 P_1 的直和项，因此唯一的可能就是 $\mathrm{Ker}(\psi) = 0$，i. e. ψ 是一个同构。反之，如果 ψ 是同构，则 $\zeta_1 = \hat{\zeta}_1$，因此 ζ_1 是 M_1 的投射盖。

由定理 3.6.1，在同构意义下，内射包和投射盖是唯一的。例如，在内射的情况下，置 $M = M_1 = M_2$，$\varphi = 1_M$，则 η_2 是 M 的内射包当且仅当 ψ 是同构。

现在考虑投射盖与内射包的存在问题。然而——以后就会看到——对每个模存在内射包，对偶的命题却不成立，即是说存在这样的模，其投射盖不存在。例如，没有一个其自身不是投射的 $\mathbb{Z}$ - 模有投射盖。因为就像 3.1 节所阐述的，自由 $\mathbb{Z}$ - 模的唯一小子模就是零子模。

因此，出现了这样有趣的问题，对于具何种特征的环 R，每个 R - 模有投射盖？可

以证明：每个右 R－模都有投射盖，其充要条件是 R 的左理想之集满足极小条件(见参考文献[1]第315页)。

定理 3.6.2 每个模有内射包，更确切地，如果 $\mu: M\to Q$ 是模 M 到 Q 内射模的单同态，$\mathrm{Im}(\mu)''$ 是 $\mathrm{Im}(\mu)$ 在 Q 内的交补的交补且 $\mathrm{Im}(\mu)\overset{\cdot}{\rightarrow}\mathrm{Im}(\mu)''$，则

$$\tilde{\mu}: M\to \mathrm{Im}(\mu)''.$$

$\tilde{\mu}$：$\tilde{\mu}(m)=\mu(m)$，$\forall m\in M$，(μ 的象域限制在 $\mathrm{Im}(\mu)''$ 上)，是 M 的内射包。

证明：令 $A=\mathrm{Im}(\mu)$。如在引理3.2.3(3)证明的 $A\overset{\cdot}{\rightarrow}A''$。剩下要证明的是 A'' 为内射的，为此，要证明 A'' 是 Q 的直和项。由于 Q 是内射的，由定理3.3.1，A'' 亦然，考虑图3.14，此处的 i 是包含映射。

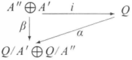


图 3.14

为定义 α 和 β，记 $Q/A'\oplus Q/A''$ 的元素以序对的形式，于是对 $a''+a'\in A''\oplus A'$，令

$$\beta(a''+a')=(a''+a'+A',\ a''+a'+A'')=(a''+A',\ a'+A''),$$

$$\alpha(q)=(q+A',\ q+A'').$$

于是，图3.14是交换的，i. e. 因此有 $\beta=\alpha i$，此由 $\mathrm{Im}(\beta)\to\mathrm{Im}(\alpha)$ 即得证。由于 $A''\cap A'=0$，故 α 和 β 是单同态。因为 Q 是内射的，α 是单同态，故 α 分裂。

我们断言 $\mathrm{Im}(\beta)\overset{\cdot}{\rightarrow}Q/A\oplus Q/A''$。因为由引理3.2.3知，$(A''+A')/A'\overset{\cdot}{\rightarrow}Q/A'$ 与 $(A''+A')/A'\overset{\cdot}{\rightarrow}Q/A''$。于是由推论3.1.1，断言成立。

由于 $\mathrm{Im}(\beta)\to\mathrm{Im}(\alpha)$，则 $\mathrm{Im}(\alpha)\overset{\cdot}{\rightarrow}Q/A'\oplus Q/A''$。由于 α 分裂，因此 $\mathrm{Im}(\alpha)=Q/A'\oplus Q/A''$，i. e. α 是一个同构。对任意一个 $q\in Q$，$\exists q_1\in Q$，使 $(q+A',\ 0+A'')=(q_1+A',\ q_1+A'')$。因此，$q_1\in A''$，$q\in A''+A'$，所以，$A''+A'=Q$。

现在来总结一下是如何得到模 M_R 的内射包的：

(1)将 M 作为阿贝尔群同构嵌入可除群 D 内。

(2)作嵌入映射 μ：$M_R\to\mathrm{Hom}_Z(R,\ D)_R$，此处模 $\mathrm{Hom}_Z(R,\ D)_R$ 是内射的。

(3)令 $\mathrm{Im}(\mu)''$ 为 $\mathrm{Im}(\mu)$ 在 $\mathrm{Hom}_Z(R,\ D)_R$ 的交补的交补，且 $\mathrm{Im}(\mu)\to\mathrm{Im}(\mu)''$，则 $\tilde{\mu}$：$M\ni m\mapsto\mu(m)\in\mathrm{Im}(\mu)''$ 是内射包。

显然，由于这个复杂的构造，利用 M 的性质推测 M 的内射包几乎是没什么希望的。由 M 到它的内射包，M 的哪些性质要保留，哪些性质要丢掉，这是很有趣的问题，人们已从各种不同的观点和假设进行探讨。

内射包，作为"极小的内射扩张"也可以刻画为"极大的本质扩张"。

定义 3.6.2　令 α: $A \to B$ 是一个单同态。

(1) α 叫作 A 的大扩张(或本质扩张) $:\Leftrightarrow \mathrm{Im}(\alpha) \overset{\cdot}{\hookrightarrow} B$。

(2) α 叫作 A 的极大扩张(或极大本质扩张) $:\Leftrightarrow \mathrm{Im}(\alpha)$ 是 A 的大扩张且 B 的每个大扩张是同构的。

定理 3.6.3　令 γ: $M \to W$ 是一个单同态，则有：γ 是 M 的极大本质扩张当且仅当 γ 是 M 的内射包。

证明：令 η: $M \to Q$ 是 M 的一个内射包，由于 Q 是内射的，故存在 φ 使图 3.15 交换。

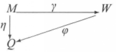


图 3.15

由于 $\mathrm{Im}(\gamma) \overset{\cdot}{\hookrightarrow} W$，$\mathrm{Im}(\gamma) \cap \mathrm{Ker}(\varphi) = 0$，因此有 $\mathrm{Ker}(\varphi) = 0$。i. e. φ 是一个单同态。由于 $\mathrm{Im}(\eta) \hookrightarrow \mathrm{Im}(\varphi)$，$\mathrm{Im}(\eta) \overset{\cdot}{\hookrightarrow} Q$，故有 $\mathrm{Im}(\varphi) \overset{\cdot}{\hookrightarrow} Q$。令令 γ 是一个极大本质扩张，则 φ 是一个同构。因此，γ 是一个内射包。

反之，每个内射包是极大本质扩张。事实上，每个单同态 α: $Q \to B$(Q 是内射模)是分裂的且其真直和项在含有它们的模中不是大子模。

习题 3.6

1. 用 $I(M)$ 表示 M 的内射包且 $M \hookrightarrow I(M)$，

(1) 证明：对 $\forall m \in M$，满足 $\varphi(m) = m$ 的 $I(M)$ 的自同态 φ 是同构。

(2) 证明下列条件是等价的：

①对 $\forall m \in M$，满足 $\varphi(m) = m$ 的 $I(M)$ 的每个自同态 φ 是 $I(M)$ 的恒等映射。

② $\mathrm{Hom}_R(I(M)/M,\ I(M)) = 0$。

2. 证明：如果 Q_1，Q_2 是内射的，μ_1: $Q_1 \to Q_2$，μ_2: $Q_2 \to Q_1$ 是单同态，则有：$Q_1 \cong Q_2$。提示：不失一般性，可假设 $Q_2 \hookrightarrow Q_1$，μ_1: $Q_1 \to Q_1$，μ_2 是包含映射。令 $Q_1 = Q_2 \oplus A$，则令

$$B = A + \mu_1(A) + \mu_1^2(A) + \mu_1^3(A) + \cdots。$$

令 C 是 $B \cap Q_2 = \mu_1(B)$ 在 Q_2 中的内射包，利用同态 $B \ni b \mapsto \mu_1(b) \in C$ 可证 $A \oplus C \cong C$。

3.7　贝尔判别准则

为确定一个模 Q 是否为内射的，需要验证对每个单同态 α：$A\to B$ 和每个同态 φ：$A\to Q$，是否存在同态 κ：$B\to Q$ 使得 $\varphi=\kappa\alpha$。这就提出一个问题，能否限制一下"验证单同态"的范围。事实上，这是可能的。

定理 3.7.1　（贝尔判别准则）模 Q_R 是内射的$\Leftrightarrow$对每个右理想 $U\hookrightarrow R_R$ 和对每个同态 ρ：$U\to Q$，存在一个同态 τ：$R_R\to Q$ 使 $\rho=\tau i$，此处 i 是 U 到 R 内的包含映射。

证明：条件的必要性是显然的，充分性的证明分两步进行。

第一步：设 α：$A\to B$ 是单同态，$\varphi\in \mathrm{Hom}_R(A,\ Q)$。令 $C\hookrightarrow B$ 且 $\mathrm{Im}(\alpha)\hookrightarrow C$，$\gamma$：$C\to Q$ 且 $\varphi(a)=\gamma\alpha(a)$，$\forall a\in A$。

断言：$\exists C_1\hookrightarrow B$ 且 $C\hookrightarrow C_1$ 和 γ_1：$C_1\hookrightarrow Q$，$\gamma_1|_C=\gamma$，因此也有 $\varphi(a)=\gamma_1\alpha(a)$。

为证这个断言，令 $b\in B$，$b\notin C$，置 $C_1=C+bR$。如果有 $C\cap bR=0$，则可立即将 γ 平凡地拓广到 C_1 上，困难的是有情形 $C\cap bR\neq 0$。令

$$U=\{u\mid u\in R\wedge bu\in C\},$$

则 U 显然是 R 的一个右理想。

$$\zeta:\ U\ni u\mapsto bu\in C$$

是一个 R-同态。令 $\rho=\gamma\zeta$，则有 ρ：$U\to Q$，由假设存在 τ：$R\to Q$，使得 $\rho=\tau i$，即图 3.16 是交换的。

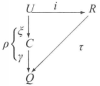


图 3.16

今定义 γ_1：$C_1\to Q$，

$$\gamma_1:\ C+bR\ni c+br\mapsto \gamma(c)+\tau(r)\in Q。$$

为证 γ_1 是定义良好的，令 $c+br=c_1+br_1$，c，$c_1\in C$，r，$r_1\in R$，则

$$c-c_1=b(r_1-r)\in C\cap bR\Rightarrow r-r_1U\Rightarrow \gamma\zeta(r-r_1)=\tau(r-r_1)$$

$$\Rightarrow \gamma(c-c_1)=\gamma(b(r_1-r))=\gamma\zeta(r_1-r)=\tau(r_1-r)$$

$$\Rightarrow \gamma(c)+\tau(r)=\gamma(c_1)+\tau(r_1)$$

由于 γ 和 τ 是 R－同态，故 r_1 也是 R－同态。由 r_1 的定义，$r_1|_C = r$。

第二步，令 $C_0 = \mathrm{Im}(\alpha)$，$\alpha_0$：$A \to C_0$，$\alpha_0(a) = \alpha(a)$，$\alpha_0$ 是同构。此外，令 $\gamma_0 = \varphi\alpha_0^{-1}$，则有 $\varphi(a) = \gamma_0\alpha(a)$，$\forall a \in A$。利用第一步和佐恩引理，同态 γ_0 可以拓广到整个 B 上。为此，令 $\Gamma = \{(c, r) \mid \mathrm{Im}(\alpha) = C_0 \hookrightarrow C,\ \gamma: C \to Q,\ \gamma|_{C_0} = \gamma_0\}$。由于 $(c_0, \gamma_0) \in \gamma$，故 $\Gamma \neq \phi$。Γ 内的偏序定义如下：

$$(c, \gamma) \leqslant (c_1, \gamma_1) :\Leftrightarrow \begin{cases} C \hookrightarrow C_1 \\ \gamma_1|_C = \gamma \end{cases}$$

今令 Λ 是 Γ 的非空全序子集，令 $D = \bigcup_{(c,\gamma)\in\Lambda} C$，则 $C_0 \hookrightarrow D \hookrightarrow B$。进一步，令 δ：$D \ni d \mapsto \gamma(d) \in Q(\forall d \in C,\ (c, \gamma) \in \Lambda)$，则由偏序定义的第二个式子，这是一个同态，且 $\delta|_{C_0} = \gamma_0$。因此，(D, δ) 是 Λ 在 γ 内的上界。所以，由佐恩引理，γ 内存在一个极大元。由第一步，它一定等于 (B, κ) 且 $\varphi = \kappa\alpha$。

然而，这个命题的对偶命题不成立。

下章给出贝尔准则的一个重要应用。那里将证明：R 是诺特环 $\Leftrightarrow$ 内射 R－模的每个直和仍是内射的。

第 4 章　阿廷模与诺特模

4.1　定义和特征

定义 4.1.1

(1)一个模 M_R 叫作诺特的或阿廷的:⇔每个非空子模集都有一个极大的或极小的子模。

(2)一个环 R 叫作右诺特或右阿廷的:⇔R_R 是诺特的或阿廷的。

(3)M_R 的子模链

$$\cdots \hookrightarrow A_{i-1} \hookrightarrow A_i \hookrightarrow A_{i+1} \hookrightarrow \cdots$$

(有限的或无限的)叫作平稳的:⇔此链只含有限多个不同的 A_i。

注:

(1)这些性质在同构意义下显然被保留。

(2)诺特模叫具有极大条件的模，阿廷模叫具有极小条件的模。

定理 4.1.1　令 $M = M_R$，$A \hookrightarrow M$，则:

(1)下列条件是等价的:

①M 是阿廷的。

②A 和 M/A 是阿廷的。

③M 的每个子模降链 $A_1 \hookleftarrow A_2 \hookleftarrow A_3 \hookleftarrow \cdots$ 是平稳的。

④M 的每个商模是有限生成的。

⑤在 M 的每个非空子模集 $\{A_i \mid i \in I\}$ 内，存在有限子集 $\{A_i \mid i \in I_0\}$ (i. e. $I_0 \in I$ 是有限的)，使得 $\bigcap\limits_{i\in I} A_i = \bigcap\limits_{i\in I_0} A_i$。

(2)下列条件是等价的:

①M 是诺特的。

②A 和 M/A 是诺特的。

③M 的每个子模升链 $A_1 \hookrightarrow A_2 \hookrightarrow A_3 \hookrightarrow \cdots$ 是平稳的。

④M 的每个子模是有限生成的。

⑤在 M 的每个非空子模集 $\{A_i \mid i \in I\}$ 中，存在有限子集 $\{A_i \mid i \in I_0\}$（i. e. $I_0 \subset I$ 是有限的），使得 $\sum_{i \in I} A_i = \sum_{i \in I_0} A_i$。

（3）下列条件是等价的：

①M 是阿廷和诺特的。

②M 是有限长的。

证明是很容易的，请读者自证。

条件（1）③，条件（2）③分别叫降链条件，升链条件。因此，由定理 4. 1. 1，有：一个模满足极小或极大条件⇔它满足降链或升链条件。如果仅考虑有限生成子模，而不是所有的子模、循环子模或模的直和项，这个结论也是对的。因此，就有：一个模对有限生成子模满足极小条件（在每个生成子模的非空集内，存在一个极小元）当且仅当对有限生成子模，降链条件被满足。也就是说，有限生成子模的每个降链条件是平稳的。这个结论和它相应的证明留给读者作为练习。

推论 4. 1. 1

（1）如果 M 是诺特模或阿廷模的有限和，则 M 也是诺特模或阿廷模。

（2）如果 R 是右诺特或右阿廷环，$M = M_R$ 是有限生成的，则 M 是诺特的或阿廷的。

（3）右诺特或右阿廷环的每个商环仍是右诺特或右阿廷的。

证明：

（1）令 $M = \sum_{i=1}^{n} A_i$，$A_i \hookrightarrow M$。对直和项的数目 n 进行归纳证明。对 $n=1$，结论显然成立。归纳假设 $n-1$ 时，结论成立，令

$$M = \sum_{i=1}^{n} A_i,\ (A_i \text{ 诺特或阿廷的，对} \forall i)$$

则 $L = \sum_{i=1}^{n-1}$ 是诺特或阿廷的，由第一同构定理，有

$$M/A_n = (L + A_n)/A_n \cong L/L \cap A_n 。$$

由定理 4. 1. 1，当 L 是诺特模或阿廷模时，$L/L \cap A_n$ 亦是，从而 M/A_n 亦是。由于 A_n 亦是诺特或阿廷的，由定理 4. 1. 1，结论成立。

（2）对 $x \in M$，考虑映射

$$\varphi_x :\ R \ni r \mapsto xr \in M 。$$

这是从 R_R 到 M_R 内的同态。由同态定理，可以得到

$$R/\mathrm{Ker}(\varphi)\cong\mathrm{Im}(\varphi_x)=xR。$$

这是一个右 R - 模。如果 Rr 是阿廷的或诺特的，则由定理 4.1.1，xR 亦是。如果$(x_1,\cdots,x_n)$是 M_n 的生成元集，则由(1)，结论成立。

(3)令 $A\hookrightarrow {}_RR_R$，当 R_R 是诺特或阿廷的，则$(R/A)_R$ 也是。

由于$(R/A)A=0$，故$(R/A)_R$ 的子模与 R/A 的右理想相吻合，故此结论成立。

诺特模和阿廷模的例子如下：

1. 每个有限维线性空间是有限长的。

2. 无限维向量空间既不是阿廷的也不是诺特的。

3. 域 K 上的有限维代数是双边有限长的。这是因为每个右或左理想均是作为 K - 向量空间的子空间。

4. $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ 是诺特的但不是阿廷的。

5. 令 p 是一素数，令

$$Q_p=\left\{\frac{a}{p_i}\mid a\in\mathbb{Z}\ \wedge i\in N\right\}。$$

i. e. 有理数集，其分母是 p 的幂次(包括 $p^0=1$)，则 Q_p 是 Q 的子群(指作为加群)且 $\mathbb{Z}\hookrightarrow Q_p$。于是作为$\mathbb{Z}$ - 模，$Q_p/\mathbb{Z}$是阿廷的但不是诺特的。

习题 4.1

1. 证明定理 4.1.1。

2. 找出一个环，在一边是阿廷和诺特的，从而有限长的，而在另一边既不是阿廷的也不是诺特的。

3. 令 R_n 是系数在 R 上的 $n\times n$ 方阵环。证明：R_n 分别是右阿廷和右诺特的$\Leftrightarrow R$ 分别是右阿廷和右诺特的。

4. 证明：没有零因子的每个右阿廷环是体。

4.2 希尔伯特基定理

希尔伯特基定理可作为某类诺特环的构造来考虑。它在代数几何里有着重要的应用。

定理 4.2.1 令 R 是右诺特环，则多项式环 $R[x]$(x 与 R 内的系数是可交换的)也

是右诺特的。

推论 4.2.1：　$R[x_1, x_2, \cdots, x_n]$亦是右诺特的。

为了证明定理4.2.1，就要证明$R[x]$的每个右理想都是有限生成的。假设$A \neq 0$，分三步来证明。

第一步：令$P(x) = x^n r_n + x^{n-1} r_{n-1} + \cdots + r_0 \in R[x]$，$r_n \neq 0$，则$r_n$叫作$P(x)$的最高次项系数。置多项式的最高次项系数为0。令$A_0 = A$内多项式的最高次项系数集。

结论：$A_0 \hookrightarrow R_R$。

证明：令a，$b \in A_0$，$a = 0$，$b \neq 0$，则存在

$$P_1(x) = x^m a + x^{m-1} a_{m-1} + \cdots \in A,$$

$$P_2(x) = x^n b + x^{n-1} b_{n-1} + \cdots \in A。$$

进一步地令r_1，$r_2 \in R$满足$ar_1 + br_2 \neq 0$。于是，$P_1(x) x^n r_1 + P_2(x) x^m r_2 \in A$。因此，$ar_1 + br_2 \in A_0$。所以，$A_0 \hookrightarrow R_R$。

由于R_R是诺特的，故A_0是有限生成的。令a_1，$\cdots$，a_k是A_0的生成元集，此处所有的$a_i \neq 0$，则存在$P_1(x)$，$\cdots$，$P_k(x) \in A$，其最高次项系数分别为a_1，$\cdots$，a_k。利用乘以x的幂可以使得所有的$P_i(x)$有相同的次数，比如说n，令令

$$B = \sum_{i=1}^{k} P_i(x) R[x];$$

则B是有限生成的，而且还有$B \hookrightarrow A$。

第二步，令$F(x) \in A$。

结论：$F(x)$可以写成形式$F(x) = G(x) + H(x)$，其中$G(x) \in B$，$H(x) = 0$，或者$H(x)$的次数不大于n。

证明：如果$F(x) = 0$或$F(x)$的次数不大于n，则取$H(x) = F(x)$，结论就成立。因此，令$F(x)$的次数$t > n$。如果b是$F(x)$的最高次项系数，则b可以表示为如下形式：

$$b = a_1 r_1 + \cdots + a_k r_k,\ r_i \in R。$$

多项式

$$F_1(x) = F(x) - \left[\sum P_i(x) r_i\right] x^{t-n}$$

的次数$\leqslant t-1$或$F_1(x) = 0$。因此，置

$$G_1(x) = \left[\sum P_i(x) r_i\right] x^{t-n}$$

有

$$F(x) = G_1(x) + F_1(x)。$$

这里$G_1(x) \in B$。当$F_1(x)$的次数不大于n时，可相应地分解为

$$F_1(x)=G_2(x)+F_2(x)。$$

其中，$G_2(x)\in B$，$F_2(x)=0$，或 $F_2(x)$ 的次数不大于 $t-2$。于是，有

$$F(x)=G_1(x)+G_2(x)+F_2(x)。$$

其中，$G_1(x)+G_2(x)\in B$，$F_2(x)=0$ 或 $F_2(x)$ 的次数不大于 $t-2$。

至多$(t-n)$步后（即用数学归纳法）得到所求分解

$$F(x)=G(x)+H(x)。$$

由于 $F(x)\in A$，$G(x)\in B\hookrightarrow A$，于是

$$H(x)=F(x)-G\in A\cap(R+xR+\cdots+X^nR)。$$

第三步，今考虑右 R－模 $A\cap(R+xR+\cdots+x^nR)$。

这是有限生成右 R－模 $R+xR+\cdots+x^nR$ 的 R－子模（在右诺特环 R 上）。由定理 4.2.1 和推论 4.2.1，这也是有限生成的。比如说，可令

$$A\cap(R+xR+\cdots+x^nR)=\sum_{j=1}^{t}Q_j(x)R。$$

因而断言：$A=\sum_{i=1}^{k}P_i(x)R[x]+\sum_{j=1}^{l}Q_j(x)R[x]$。

由于 $P_i(x)$，$Q_j(x)\in A$，故右边$\subset A$。由 $F(x)$ 式，A 亦含于右边。从而定理得证。

4.3 阿廷模和诺特模的同态

首先令 $M=M_R$ 是任一个模，φ 是 M 的一个自同态，i. e. 是 M 到自身的一个同态，则 $\varphi^n(n\in N)$ 也是 M 的自同态。因此有

$$\mathrm{Im}(\varphi)\hookleftarrow\mathrm{Im}(\varphi^2)\hookleftarrow\mathrm{Im}(\varphi^3)\hookleftarrow\cdots$$

$$\mathrm{Ker}(\varphi)\hookrightarrow\mathrm{Ker}(\varphi^2)\hookrightarrow\mathrm{Ker}(\varphi^3)\hookrightarrow\cdots$$

当 M 是阿廷模或诺特模时，这两个链均是平稳的，这就得出了有趣的推论。

定理 4.3.1　令 φ 是 M 的自同态，则有：

(1) M 是阿廷的 $\Rightarrow\exists n_0\in N$，$\forall n\geqslant n_0$，$M=\mathrm{Im}(\varphi^n)+\mathrm{Ker}(\varphi^n)$。

(2) M 是阿廷的且 φ 是单同态 $\Rightarrow\varphi$ 是自同构。

(3) M 是诺特的 $\Rightarrow\exists n_0\in N$，$\forall n\geqslant n_0$，$0=\mathrm{Im}(\varphi^n)\cap\mathrm{Ker}(\varphi^n)$。

(4) M 是诺特的 $\wedge\varphi$ 是满同态 $\Rightarrow\varphi$ 是个自同构。

证明：

(1) 由前面的注，存在 $n_0\in N$ 使得 $\mathrm{Im}(\varphi^{n_0})=\mathrm{Im}(\varphi^n)$，$\forall n\geqslant n_0$。于是，对 $n\geqslant n_0$，

有 $\mathrm{Im}(\varphi^n)=\mathrm{Im}(\varphi^{2n})$。令 $x\in M$，则 $\varphi^n(x)\in\mathrm{Im}(\varphi^n)=\mathrm{Im}(\varphi^{2n})\Rightarrow\exists y\in M$ 使得 $\varphi^n(x)=\varphi^{2n}(y)\Rightarrow\varphi^n(x-\varphi^n(y))=0\Rightarrow\kappa=x-\varphi^n(y)\in\mathrm{Ker}(\varphi^n)\Rightarrow x=\varphi^n(y)+\kappa\in\mathrm{Im}(\varphi^n)+\mathrm{Ker}(\varphi^n)$。

(2) 如果 φ 是单同态，则显然 $\varphi^n(\forall n\in N)$ 也是，i. e. $\mathrm{Ker}(\varphi^n)=0$。由(1)可得，$M=\mathrm{Im}(\varphi^{n_0})$。因为 $\mathrm{Im}(\varphi^{n_0})\hookrightarrow\mathrm{Im}(\varphi)$，故有 $M=\mathrm{Im}(\varphi)$。所以 φ 是满同态，从而是同构。

(3) 存在 $n_0\in N$，使得 $\mathrm{Ker}(\varphi^{n_0})=\mathrm{Ker}(\varphi^n)$，$\forall n\geqslant n_0$。于是，对 $n\geqslant n_0$，有 $\mathrm{Ker}(\varphi^n)=\mathrm{Ker}(\varphi^{2n})$。令 $x\in\mathrm{Im}(\varphi^n)\cap\mathrm{Ker}(\varphi^n)$，则 $\exists y\in M$，使 $x=\varphi^n(y)$。则有 $0=\varphi^n(x)=\varphi^{2n}(y)$。所以 $y\in\mathrm{Ker}(\varphi^{2n})=\mathrm{Ker}(\varphi^n)$。因此 $x=\varphi^n(y)=0$。于是就得 $0=\mathrm{Im}(\varphi^n)\cap\mathrm{Ker}(\varphi^n)$。

(4) 如果 φ 是满同态，则 $\forall n\in N$，φ^n 亦是满的，i. e. $\mathrm{Im}(\varphi^n)=M$。由(3)，存在正整数 n_0 使 $\mathrm{Ker}(\varphi^{n_0})=0$。因此，由 $\mathrm{Ker}(\varphi)\hookrightarrow\mathrm{Ker}(\varphi^{n_0})$。由于也有 $\mathrm{Ker}(\varphi)=0$，所以 φ 是单射，从而是自同构。

推论 4.3.1　令 M 是有限长的模，φ 是 M 的满同态，则有

(1) $\exists n_0\in N$，$\forall n\geqslant n_0$，$M=\mathrm{Im}(\varphi^n)\oplus\mathrm{Ker}(\varphi^n)$。

(2) φ 是自同构 $\Leftrightarrow\varphi$ 是满同态，φ 是自同构 $\Leftrightarrow\varphi$ 是单同态。

请读者自己证明这个推论。

习题 4.3

1. 请给出一个环 R 和模 M_R 使得 M_R 非有限长，且对 $\forall\varphi\in\mathrm{End}(M_R)$ 成立：

(1) $\exists n_0\in N$，$\forall n\geqslant n_0$，$M=\mathrm{Im}(\varphi^n)\oplus\mathrm{Ker}(\varphi^n)$。

(2) φ 是自同构 $\Leftrightarrow\varphi$ 是满的 $\Leftrightarrow\varphi$ 是单的。

提示：对 M_R 利用无限多个非同构单 R－模的直和。

2. 证明推论 4.3.1。

4.4　诺特环的特征

在这里给出诺特环的特征，它对于诺特环上的模论有着重要意义，证明基本上依赖于贝尔法则。

定理 4.4.1　下列叙述对环 R 是等价的：

(1)R_R 是诺特的。

(2)内射右 R - 模的每个直和是内射的。

(3)单右 R - 模的内射包的每个可数直和是内射的。

证明：

"(1)⇒(2)"：令 $Q = \bigoplus_{i \in I} Q_i$ 是内射右 R - 模的内直和或外直和。由第四章 4.7 的贝尔判别准则，证明 Q 的内射性只要证明这样事实成立就行了。

对 R_R 的每个右理想 U 和每个同态 ρ：$U \to Q$，存在同态 τ：$R \to Q$，使得 $\rho = \tau i$，这里的 i 是包含映射。

由于 R_R 是诺特环，故 U 是有限生成的，即

$$U = \sum_{i=1}^{n} u_i R。$$

像 $\rho(u_i)(i=1, 2, \cdots, n)$ 仅对有限多个 Q_i 不为 0，不妨设对 $Q_i(i \in I_0$，I_0 是 I 的有限子集)。

令

$$i_0: \bigoplus_{i \in I_0} Q_i \to \bigoplus_{i \in I} Q_i$$

是包含映射，ρ_0 是由 ρ 的像域到 $\bigoplus_{i \in I_0} Q_i$ 的限制而诱导的映射，则有 $\rho = i_0 \rho_0$。

由于 I_0 是有限的，$\bigoplus_{i \in I} Q_i$ 是内射的，存在同态 τ_0，使得图 4.1 交换。

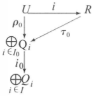


图 4.1

因此有 $\rho = i_0 \rho_0 = i_0 \tau_0 i = \tau_i$，其中 $\tau = i_0 \tau_0$。

"(2)⇒(3)"：(3)是(2)的特殊情形。

"(3)⇒(1)"：证明间接地进行。

若 R_R 不是诺特的，则 R 存在右理想真升链

$$A = A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq A_3 \subsetneq \cdots,$$

则 $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 也是 R 的右理想。对每个 $a \in A$ 时，存在 $n_a \in N$，当 $n \geq n_a$，$a \in A_i$。对每个 $i = 1, 2, \cdots$，令 $c_i \in A$，$c_i \notin A_i$。在循环模$(c_i R + A_i)/A_i$ 中，由定理 1.2.1，存在极大子模 N_i/A_i。于是，

$$E_i = (c_iR + A_i)/(N_i/A_i)$$

是单右 R－模。设 γ_i：$(c_iR + A_i)/A_i \to E_i$ 是自然满同态，$iI(E_i)$ 是 E_i 的内射包，$E_i \hookrightarrow I(E_i)$，令 i：$E_i \to I(E_i)$ 是包含映射，则存在如下的交换图，如图 4.2 所示。

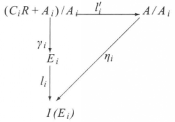


图 4.2

此处 l_i 是对应的包含映射。因此有 $\eta_i(\overline{c_i}) = l_i\gamma_i(\overline{c_i}) \neq 0$，（对 $i = 1, 2, 3, \cdots$）。

今定义 α：$A \ni a \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n_a} \eta_i(a + A_i) \in \bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} I(E_i)$。

其中 $\eta_i(a + A_i)$ 是 $\alpha(a)$ 的第 i 个分量。由于 $a \in A_i$，$i \geqslant n_a$，故 $\alpha(a)$ 事实上位于一个直和内。作为外部直和，令 $\alpha(a) = \eta_i(a + A_i)$。因为由假设，$\bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} I(E_i)$ 是内射的，故存在 β 使得图 4.3 是交换的。令 b_i 是 $\beta(1)$ 在 $\oplus I(E_i)$ 内的第 i 个分量，则存在 $n \in N$ 使得 $i \geqslant n$ 时，$b_i = 0$。由 $\alpha(a) = \beta(a) = \beta(1)a$，$a \in A$。于是 $\eta_i(a + A_i) = b_ia$。因此，对 $i \geqslant n$，$\forall a \in A$，$\eta_i(a + A_i) = 0$。但由 η_n 的定义，$\eta_n(c_n + A_n) \neq 0$。矛盾！

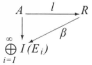


图 4.3

注：若仅对定理 4.4.1“(1)⇔(2)”感兴趣，则证明可做如下简化。

证明：任取一右理想升链

$$A_1 \hookrightarrow A_2 \hookrightarrow A_3 \hookrightarrow \cdots,$$

令 $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$，再令 η_i 是包含映射。

$$\eta_i:\ A/A_i \ni a + A_i \mapsto a + A_i \in I(A/A_i)。$$

令 α：$A \bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} I(A/A_i)$。其定义为 $\alpha(a) = \sum\limits_{i=1}^{n_a} (a + A_i)$，$a \in A$。于是 $\eta_i = 0$，$\forall i \geqslant n$。所以，对 $i \geqslant n$，$A = A_i$。

如果 R 是任一个环，η_i：$M_i \to I(M_i)$，$i = 1, 2, \cdots, n$，是 R－模的内射包，则

$$\bigoplus_{i=1}^{n}\eta_i:\bigoplus_{i=1}^{n}M_i\to\bigoplus_{i=1}^{n}I(M_i)$$

也是内射包。如果 R_R 是诺特的，由定理 4.4.1 和贝尔准则，对应的结果对任指标集都成立。

推论 4.4.1 令 R_R 是诺特的，$(M_i \mid i\in I)$ 是一族右 R - 模，如果

$$\eta_i:\ M_i\to I(M_i)$$

是 M_i 的内射包，则

$$\bigoplus_{i=1}^{n}\eta_i:\bigoplus_{i=1}^{n}M_i\to\bigoplus_{i=1}^{n}I(M_i)$$

是 $\oplus M_i$ 的内射包。

习题 4.4

1. 证明对交换环 R，下列叙述是等价的：

(1) 对 $\forall x\in R$，序列 $xR\hookleftarrow x^2R\hookleftarrow x^3R\hookleftarrow\cdots$ 是平稳的。

(2) 对每个循环模 M_R，单自同态是自同构。

(3) R 内每个素理想是极大的。

提示：对于“(3)⇒(1)”，考虑子集 $S_x=\{x^n(1-xr)\mid n\geqslant 0,\ r\in R\}$。

2. 对模 M_R，证明下列是等价的：

(1) 和为直和的每个子模集是有限的。

(2) 每个子模对直和项满足极大条件。

(3) 每列 $U_1\hookrightarrow U_2\hookrightarrow U_3\hookrightarrow\cdots$（$U_i\hookrightarrow M$，$U_i$ 是 U_{i+1} 的直和项）是平稳的。

(4) 每列 $M\hookleftarrow U_1\hookleftarrow U_2\hookleftarrow U_3\hookleftarrow\cdots$（$U_{i+1}$ 是 U_i 的直和项）是平稳的。

(5) 每个子模有有限生成大子模。

(6) M 对交补满足极大条件。

(7) M 对交补满足极小条件。

(8) M 的内射包对直和项满足极大条件。

4.5 诺特环与阿廷环上内射模的分解

定义 4.5.1 (1) M_R 叫作直和分解的（或不可分解的）：$\Leftrightarrow M_R=0$ 存在异于 0 和 M 的直项（或 $M_R\neq 0$ 且不存在异于 0 和 M 的直和项）。

(2)令 $U \not\hookrightarrow M_R$，$M$ 叫作 U 上不可约(交不可约)的:⇔对任意子模 A，$B \hookrightarrow M$ 且 $U \not\hookrightarrow A$，$U \not\hookrightarrow B$，有 $U \neq A \cap B$。

(3)M 叫作不可约的(交不可约):⇔ M 是在 0 上不可约的。

模论的基本问题之一就是关于模分解为子模的直和。如果分解式里的子模均是不可分解的，则这种分解的极大可能显然就得到了。

在这个关系中，出现三个问题：

(1)在何种假设下，一个模可以分解为不可分解子模的直和？

(2)这样的分解(若存在)是唯一确定的吗？

(3)不可分解模具有什么样的性质？

这里诺特环和阿廷环上的内射模回答了问题(1)与(3)，问题(2)的解答在下一章由克鲁尔－雷马克－施密特定理给出。

首先从任意环上不可分解的内射模入手。

定理 4.5.1　令 Q_R 是内射的，$Q_R \neq 0$，则下列叙述是等价的：

(1)Q 是不可分解的。

(2)Q 是每个非零子模的内射包。

(3)Q 的每个非零子模是不可约的。

(4)Q 是不可约子模的内射包。

证明：

“(1)⇒(2)”：令 $U \hookrightarrow Q$，$U \neq 0$，$I(U) \hookrightarrow Q$ 是 U 的内射包。由于 $U \neq 0$，也有 $I(U) \neq 0$。由于 $I(U)$ 作为内射模是 Q 的直和项，因此 $I(U) = Q$。

“(2)⇒(3)”：令 $M \hookrightarrow Q$，A，$B \hookrightarrow M$，$A \neq 0$，$B \neq 0$。由于 Q 是 A 的内射包，故 $A \overset{*}{\hookrightarrow} Q$。于是 $A \cap B \neq 0$。

“(3)⇒(4)”：可取 Q 作为不可约子模。

“(4)⇒(1)”：令 Q 是 Q 的不可约子模 M 的内射包。假设 $Q = A \oplus B$，$A \neq 0$，$B \neq 0$。由于 $M \overset{*}{\hookrightarrow} Q$，故 $M \cap A \neq 0$，$M \cap B \neq 0$。由于 M 是不可约的，因此$(M \cap A) \cap (M \cap B) \neq 0$。这与 $A \cap B = 0$ 矛盾，所以 Q 是不可分解的。

推论 4.5.1

(1)单 R－模的内射包是不可分解的。

(2)不可分解的内射模 Q 至多含有一个单子模。

(3)如果 R_R 是阿廷的，则每个不可分解的内射模 Q_R 是单 R－模的内射包。

证明：

(1)每个单模是不可约的。

(2)令 E, E_1 是 Q 的单子模。由于 $E \hookrightarrow Q$, $E\cap E_1 \neq 0$, 因此 $E = E\cap E_1 = E_1$。

(3)令 $0\neq q\in Q$, 则由 4.1.1, qR 是阿廷的。因此, $qR \hookrightarrow Q$ 内单子模 E 存在。由定理4.5.1, Q 是 E 的内射包。

现在来看下列有趣的定理, 它给出了诺特环及阿廷环新的特征。

定理 4.5.2 (1)下列叙述是等价的:

①R_R 是诺特的。

②每个内射模 Q_R 是不可分解子模的直和。

(2)下列叙述是等价的:

①R_R 是阿廷的。

②每个内射模 Q_R 是单 R - 模的内射包的直和。

由推论4.5.1中的(1), 在刻画阿廷环出现的单 R - 模的内射包同样也是不可分解的。尤其是如果 R_R 是诺特的, 但不是阿廷的, 就存在一个不可分解的内射 R - 模, 其不含有单子模。

定理4.5.2仅给出关于诺特环"(1)⇒(2)"的证明, 为证明关于阿廷环的"(1)⇒(2)", 需要每个阿廷环是诺特环这个事实, 它将在第7章内给出证明。不仅如此, 为完成证明, 还需要进一步的引理, 特别是在同构意义下半单模分解为单模直和的分解唯一性的事实。只有给出必要的引理后, 才得到完整证明。因此, 现仅证命题4.5.1:

命题 4.5.1 如果 R_R 是诺特的, 则每个内射模 Q_R 是不可分解子模的直和。而且, 如果 R_R 是阿廷的, 则每个不可分解直和项都是某个单 R - 模的内射包。

为证命题4.5.1, 需要两个有趣的引理。

引理 4.5.1 令 Γ 是模 M_R 的子模集, 则在满足

$$\sum_{U\in\Lambda} U = \bigoplus_{U\in\Lambda} U$$

的所有子集 Λ 中, 存在一个极大子集 Λ_0。

证明: 利用佐恩引理来证明。令 $G = \{\Lambda \mid \Lambda\subset\Gamma$ 并且 $\sum_{U\in\Lambda} U = \bigoplus_{U\in\Lambda} U$ 被满足$\}$, 则 G 在包含关系下构成偏序集。因为 $\phi\in G$, 故 $G\neq\phi$(因为 $0 = \sum_{U\in\phi} U = \bigoplus_{U\in\phi} U$)。令 H 是 G 的全序子集。设 $\Omega = \bigcup_{\Lambda\in H} \Lambda$, 则 $\Omega\subset\Gamma$。因而断言: $\Omega\in G$, i. e., Ω 满足条件 $\sum_{U\in\Omega} U = \bigoplus_{U\in\Omega} U$。假设不是这样, 则 Ω 的子模的和将不是直和。因此在 Ω 中存在有限多个子模, 其和不是直和, 但 Ω 的有限多个子模必落于某个 $\Lambda\in H$ 内(因 H 全序集), 所以它们的和是直和, 矛盾。因此, 由佐恩引理, G 内存在一个极大元 Λ。

推论 4.5.2

(1)对每个模 M_R, 存在一个不可分解的内射子模集的极大集, 其和是直和。

(2) 对每个模 M_R 存在单子模的和是直和的极大单子集。

证明：在(1)的情形，若令 Γ = 不可分解的内射子模集；在(2)的情形，若令单子模集，则结论马上得证。

引理 4.5.2　如果 R_R 是诺特的，则每个模 $M_R \neq 0$ 含有一个非零不可约子模。

证明：证明 M 的每个非零有限生成子模都含有一个非零不可约子模。令 $\{X \mid X \hookrightarrow B \wedge X$ 是 B 内的交补$\}$ 是 B 的真子模集，且里面的每个元素是 B 的子模在 B 内的交补。这个集合非空，因为 0 是 B 的交补。由于 B 是诺特的，故在这个集中存在一个极大元 X_0，令 X_0 是 B 的子模 U_0 的交补。显然，$U_0 \neq 0$。我们断言：U_0 的每个非零子模 C 都满足 $C \overset{\cdot}{\hookrightarrow} U_0$。因此，$U_0$ 是不可约的。假设对 $L \hookrightarrow U_0$，有 $C \cap L = 0$，则有 $C \cap (X_0 + L) = 0$。由 X_0 的极大性和 $C \neq 0$(因此 $C' \neq B$)，有 $X_0 + L_0 = X_0$，故 $L \hookrightarrow X_0$。所以，$L \hookrightarrow U_0 \cap X_0 = 0$。于是，$C \cap L = 0 \Rightarrow L = 0$，亦即 $C \overset{\cdot}{\hookrightarrow} U_0$。

命题 4.5.1 的证明　考虑 Q 的其和是直和的不可分解内射子模集的极大集。令这个直和是 $Q_0 = \bigoplus_{i \in I} Q_i$。因为所有的 Q_i 是内射的，由定理 4.4.1 知，Q_0 是内射的。因此，Q_0 是 Q 的直和项：

$$Q = Q_0 \oplus Q_1。$$

假设 $Q_1 \neq 0$，则 Q_1 含有非 0 不可约模。令 $I(M)$ 是 M 在 Q_1 里的内射包，则 $I(M)$ 是 Q_1 的直和项，即有 $Q_1 = I(M) \oplus Q_2$。由定理 4.5.1，$I(M)$ 是不可分解的。由于 $Q_0 \oplus I(M)$ 也是 Q 的不可分解的内射子模的直和，故 $Q_0 = \bigoplus_{i \in I} Q_i$ 不是极大的。这个矛盾意味着 $Q = Q_0 = \oplus Q_i$ 成立。

如果 R_R 不仅是诺特的而且是阿廷的，则由推论 4.5.1(3)，所有的 $Q_i \neq 0$ 都是单子模的内射包。

习题 4.5

1. 证明：若 B_R 是阿廷的，$B_R \neq 0$，则 B 存在一个非零的不可分解商模。

2. 证明：

(1) 令 $M = U \oplus U_1 = V \oplus V_1$ 且 $U \hookrightarrow V$，则 U 在 M 内有直补包含 V_1(即 $M = U \oplus W$ 且 $V_1 \hookrightarrow W$)，并且 V 在 M 内有包含 U_1 的直补。

(2) M_R 对直和项满足极大条件⇔对直和项满足极小条件。

第 5 章　局部环与模的直和分解

在第 4 章，证明了诺特环上每个内射模是不可分解子模的直和，这样分解是否唯一或在什么情况下唯一？克鲁尔 - 雷马克 - 施密特定理回答了这个问题，定理是在假设直和项的自同态环是局部环下证明的。因此，先介绍局部环，然后再叙述不可分解模的自同态环是局部的为充分条件。

5.1　局　部　环

环 R 的元素 r 称为右或左可逆的，如果存在 $r' \in R$，使 $rr' = 1$ 或 $r'r = 1$，r' 叫作 r 的右逆或左逆。如果有 $rr' = r'r = 1$，则 r 叫作可逆的，r' 叫作 r 的逆元。如果 r 既有右逆元，也有左逆元，则右逆元与左逆元相等，从而 r 有逆元。就像下面例子所表示的，存在只有左逆或右逆但无逆元的元素。

现在考虑这样的环，它里面所有非逆元全体有特别结构。为方便，本书始终假设 $R \neq 0$。

定理 5.1.1　令 A 是 R 的所有非逆元素集，则下列叙述是等价的：

(1) A 是加法封闭的。i. e. $\forall a_1$、$a_2 \in A$，$a_1 + a_2 \in A$。

(2) A 是双边理想。

(3) A 是最大的真右理想。

(4) 在 R 中存在最大真右理想。

(5) 对每个 $r \in R$，r 或 $(1-r)$ 是右可逆的。

(6) 对每个 $r \in R$，r 或 $(1-r)$ 是可逆的。

证明：　"(1)⇒(2)"：先证明每个右可逆或左可逆元素是可逆的，不妨设 $R \ni b$ 有右逆元 b'，即 $bb' = 1$。

情形 1. $b'b \notin A$，则 $\exists s \in R$，使 $1 = b'bs$。因此

$$b = bb'bs = bs。$$

所以 $b'b=b'bs=1$，此为欲证者。

情形 2. $b'b\in A$，则 $1-b'b\notin A$，否则 $1-b'b+b'b=1\in A$，矛盾。

今令 $1=(1-b'b)s$，则 $b=b(1-b'b)s=(b-bb'b)s=(b-b)s=0$，此与 $bb'=1$ 矛盾。

依假设，A 是加法封闭的，则仅证明：

$$\forall a\in A,\ \forall r\in R,\ ar\in A\wedge ra\in A。$$

假设 $ar\notin A$，则 $\exists s\in R$ 使得 $ars=1$。由前面注解，$a=b$，$rs=b'$，即有 $bb'=1$，于是，$b'b=1$，从而 $rsa=1$，此与 $a\in A$ 矛盾。对 ra 可类似地证明。

“(2)⇒(3)”：由于 $A\hookrightarrow_R R_R$，有 $A\hookrightarrow R_R$，由于 $1\notin A$，$A\neq R$，令 $B\underset{\neq}{\hookrightarrow}R_R\wedge b\in B$，则 $bR\hookrightarrow B\underset{\neq}{\hookrightarrow}R_R$。所以 b 没有右逆。因此，$b\in A$。所以，$B\hookrightarrow A$。

“(3)⇒(4)”：显然。

“(4)⇒(5)”：设 C 是最大真右理想。令 $r\in R$，假设 r 和 $1-r$ 均不是右可逆的，则

$$rR\underset{\neq}{\hookrightarrow}R_R\wedge(1-r)R\underset{\neq}{\hookrightarrow}R_R。$$

因此，$rR\hookrightarrow C\wedge(1-r)R\hookrightarrow C$。所以 $1\in rR+(1-r)R\hookrightarrow C\Rightarrow C=R$ 矛盾。

“(5)⇒(6)”：只证每个右可逆元素是可逆的就足够了。令 $bb'=1$。

情形 1. $b'b$ 右可逆，则 $\exists s\in R$ 使得 $1=b'bs$。所以，$bb'bs=1$，故 $1=b'b$。

情形 2. $1-b'b$ 右可逆，则存在 $s\in R$ 使得 $1=(1-b'b)s$。所以，$b=b(1-b'b)s=bs-bb'bs=0$。此与 $bb'=1$ 矛盾。

“(6)⇒(1)”：假设对 a_1，$a_2\in A$，a_1+a_2 是可逆的，则存在 $s\in R$ 使得 $(a_1+a_2)s=1$。因此，$a_1s=1-a_2s$。由于“(6)⇒(5)”显然成立，可利用每个右可逆元是可逆的事实，就像由“(5)⇒(6)”那样。所以，由 $a\in A\wedge r\in R$，得 $ar\in A$。因为若 $ar\notin A$，则 ar 是右可逆的，所以 a 是右可逆的，从而 a 可逆。i. e. $a\notin A$，矛盾。于是，$a_1s\in A\wedge a_2s\in A$。由(6)及 $a_2s\in A$ 得 $a_1s=1-a_2s\notin A$，矛盾。

注：如果把定理 5. 1. 1 中的右换成左，就可得到一组用左理想表述的等价条件，证明也是类似的。

定义 5. 1. 1　满足定理 5. 1. 1 等价条件的环叫局部环。

推论 5. 1. 1　令 R 是局部环，A 是 R 的非可逆元素集，则有

(1) R/A 是体；

(2) 每个左或右可逆元是可逆的；

(3) 局部环的非零满同态像(环同态下)是局部环。

特别地，局部环的每个同构像是局部的。

证明留给读者。

局部环的例子如下：

1. 域 K 上的幂级数环是局部的，因为非可逆元集恰恰是那些常数项 $=0$ 的元素。而这些元素的集是加法封闭的。

2. 交换环对素理想的局部化环是局部的。

现在给出局部化的简单定义：设 R 是一个交换环，$P\neq R$ 是 R 内的一个素理想，此处 P 的定义是：

$$\forall a,\ b\in R,\ [ab\in P\Rightarrow a\in P\vee b\in P]。$$

其等价于 $\forall a,\ b\in R[a\notin P\wedge b\notin P\Rightarrow ab\notin P]$。

今令 $\Gamma=\{(r,\ a)\mid r\in R\wedge a\in R\setminus P\}$，在 Γ 内引进如下关系：

$$(r_1,\ a_1)\sim(r_2,\ a_2):\Leftrightarrow\exists a\in R\setminus P,\ r_1a_2a=r_2a_1a。$$

易证"$\sim$"是个等价关系。记以 $(r,\ a)$ 为代表元的等价集为 r/a，令 $R_{(p)}$ 是等价类集，i. e.

$$R_{(p)}=\left\{\frac{r}{a}\middle| r\in R\wedge a\in R\setminus P\right\}$$

那么由定义

$$\frac{r_1}{a_1}+\frac{r_2}{a_2}=\frac{r_1a_2+r_2a_1}{a_1a_2},\quad \frac{r_1}{a_1}\frac{r_2}{a_2}=\frac{r_1r_2}{a_1a_2},$$

$R_{(P)}$ 构成一个环，$R_{(P)}$ 的零元和单位元分别是 $\left(\frac{0}{1}\right)$ 和 $\left(\frac{1}{1}\right)$。

映射 φ：$R\ni r\mapsto\frac{r}{1}\in R_{(P)}$ 是一个环同态，$\operatorname{Im}(\varphi)$ 常与 R 视为同一(e. g. $\mathbb{Z}$ 可看作 $\mathbb{Q}$ 的子环)，$R_{(P)}$ 内恰恰是形如 $\frac{r}{a}(r\in P)$ 的元素是非可逆的。这是因为，若 $\frac{r}{a}$ 存在逆元 $\frac{r_1}{a_1}$，则 $\frac{r}{a}\frac{r_1}{a_1}=\frac{1}{1}$，于是 $\exists b\in R\setminus P$ 使得 $rr_1b=aa_1b$。由于 $r\in P$，故 $aa_1b\in P$。因 $b\notin P$，所以 $aa_1\in P$，从而 $a\in P\vee a_1\in P$，此与 $R_{(P)}$ 定义矛盾。然而这些元的集是加法封闭的，因此 $R_{(P)}$ 是局部的。

习题 5.1

1. 令 σ：$R\to S$ 是环满同态，$S\neq 0$，证明：若 R 是局部的，A 是 R 的非可逆元的理想，则 $\sigma(A)$ 是 S 的非可逆元理想。

2. 令 R 是局部环，证明下列叙述对 M_R 是等价的：

(1) M 的子模格是全序的；

(2) M 的循环子模集是全序的;

(3) M 的每个有限生成子模是循环的;

(4) M 的由任两个元生成的子模是循环的。

5.2　局部自同态环

定义 5.2.1 令 R 是一个环, $\mathbb{N}$ 为自然数集。令 $r \in R$, 只有:

(1) r 称为幂零的 $:\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}\ (r^n = 0)$。

(2) r 称为幂等的 $:\Leftrightarrow r^2 = r$。

推论 5.2.1

(1) 如果 r 是幂零的, 则 r 是不可逆的, 但 $1-r$ 是可逆的。

(2) 如果 r 是幂等的, 则 $1-r$ 也是幂等的。

(3) 如果 r 是幂等的且可逆的, 则 $r=1$。

证明:

(1) 设 $rs=1$。令 n_0 是使 $r^n=0$ 成立的最小自然数, 则 $r^{n_0-1} \neq 0$。所以, $0 = r^{n_0}s = r^{n_0-1}rs = r^{n_0-1} \cdot 1 = r^{n_0-1} \neq 0$, 矛盾。进一步, 则有 $(1-r)(1+r+r^2+\cdots+r^{n_0-1}) = (1+r+r^2+\cdots+r^{n_0-1})(1-r) = 1$。

(2) $(1-r)(1-r) = 1-r-r+r^2 = 1-r-r+r = 1-r$。

(3) $r^2 = r \wedge rr' = 1 \Rightarrow r = r \cdot rr' = r^2r' = 1$。

引理 5.2.1　令 R 是一个环, 令 $R_R = \oplus A_i$ 是 R 到右理想 $A_i\ (i \in I)$ 的一个直和分解, 则有:

(1) 子集 $I_0 = \{i \mid i \in I \wedge A_i \neq 0\}$ 是有限的, 因此 $R = \bigoplus_{i \in I_0} A_i$。

(2) 对 $i \in I_0$, 存在元素 $e_i \in A$ 使得对 $i, j \in I_0$, 有:

① $A_i = e_iR,\ i \in I_0$;

② $1 = \sum_{i \in I_0} e_i$;

③ $e_ie_j = \begin{cases} e_i & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (i, j \in I_0)$

i. e. $\{e_i \mid i \in I_0\}$ 是正交幂等元集。

(3) 如果 $A_i\ (i \in I_0)$ 是两边理想, 则元素 $e_i\ (i \in I_0)$ 属于 R 的中心(i. e. $e_ir = re_i,\ \forall r \in R$)。

(4)反之，如果给出正交幂等元 $e_1, e_2, \cdots, e_n \in R$，且满足 $1 = \sum_{i=1}^{n} e_i$，则 $R = \bigoplus_{i=1}^{n} e_iR$。事实上，$e_iR$ 是两边理想，亦即 e_i 含于 R 的中心内。

证明： 令 $1 = \sum_{i\in I} e_i,\ e_i \in A_i$，令 $I_0 = \{i \mid i \in I \wedge e_i \neq 0\}$，则 I_0 是有限的。

由于有

$$1 = \sum_{i\in I_0} e_i,$$

故对 $i \in I_0$，$e_i \neq 0$。由于 $e_i \in A_i$，于是对 $i \in I_0$，$A_i \neq 0$。今令 $a_j \in A_j(\forall j \in I)$，则由 $1 = \sum_{i\in I} e_i$ 右乘 a_j，得 $a_j = \sum_{i\in I_0} e_ia_j$。由于 $R_R = \bigoplus_{i\in I} A_i$，故 $e_ia_j \in A_i$。

于是有以下证明：

对 $j \notin I_0$：$a_j = 0 \Rightarrow A_j = 0 \Rightarrow I_0 = \{i \mid i \in I \wedge A_i \neq 0\} \Rightarrow R = \bigoplus_{i\in I_0} A_i$，从而得证(1)。

对 $j \in I_0: a_j = e_ja_j \Rightarrow A_j = e_jA_j \hookrightarrow e_jR \hookrightarrow A_j \Rightarrow A_j = e_jR$，所以对 $i \neq j$，成立 $0 = e_ia_j$。如果限于 $i, j \in I_0$，对 $e_j = a_j$，则成立 $e_j = e_je_j, e_ie_j = 0(i \neq j)$。由此，整个(2)均得证。由 $r \in R, 1 = \sum_{i\in I_0} e_i$，得 $r = \sum_{i\in I_0} e_ir, r = \sum_{i\in I_0} re_i$。如果 A_i 是两边理想，则有：$re_i \in A_i$。由于 $\sum_{i\in I_0} e_ir = \sum_{i\in I_0} re_i$，则 $e_ir = re_i$，从而(3)成立。为证(4)，首先有

$$R = \sum_{i=1}^{n} e_iR \quad (\text{因为 } 1 = \sum_{i=1}^{n} e_i)。$$

今令 $r \in e_{i_0}R \cap \sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{n} e_iR$，于是 $r = e_{i_0}r$，$r = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{n} e_ir_i$。因此，$r = e_{i_0}r = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{n} e_{i_0}e_ir_i = 0$。

所以，有 $R = \bigoplus_{i=1}^{n} e_iR$。

如果 e_i 位于 R 的中心内，由于 $re_iR = e_irR \hookrightarrow e_iR$，故 e_iR 是双边理想。

推论 5.2.2 对一个环 R，下列条件是等价的：

(1) R_R 是不可分解的；

(2) ${}_RR$ 是不可分解的；

(3) 1 和 0 是 R 内唯一的幂等元。

证明：

"(1)⇒(3)"：令 e 是一个幂等元，则 e 与 $1-e$ 是正交幂等元且 $1 = e + (1-e)$。因此，由引理 5.2.1 知，$R = eR \oplus (1-e)R$。根据(1)中的条件可知 $eR = 0$，从而有 $e = 0$ 或 $eR = R$。于是，$(1-e)R = (1-e)eR = 0$。因此，$(1-e)\cdot 1 = 1 - e = 0$。

"(3)⇒(1)"：假设 $R_R = A \oplus B$，则由引理 5.2.1，存在幂等元 e 使 $A = eR$。由(3)中条件知 $e = 1$ 或 $e = 0$。因此，$A = R$ 或 $A = 0$。i. e. R_R 是不可分解的。类似地，可证明

"(2)⇔(3)"。

定理 5.2.1　令 $S=\mathrm{End}(M_R)$，则下列条件是等价的。

(1)M_R 是不可分解的；

(2)S_S 是不可分解的；

(3)$_SS$ 是不可分解的；

(4)0 和 1 是 S 内仅有的幂等元。

证明：

由推论 5.2.2，(2)、(3)和(4)是等价的。

"(1)⇒(2)"：令 $e\in S$ 是一个幂等元，则有

$$M=e(M)\oplus(1-e)(M)。$$

这是因为，$\forall m\in M$，$m=e(m)+(1-e)(m)$，如果假设 $e(m_1)=(1-e)(m_2)$，则由这个方程得 $e^2(m_1)=e(m_1)=e(1-e)(m_2)=0$。

由(1)，$e(M)=0$。因此，$e=0$ 或$(1-e)(M)=0$。所以，$e=1$。

"(4)⇒(1)"：假设 $M_R=A\oplus B$，则 η：$M\ni a+b\mapsto a\in M$ 是一个自同态且满足 $\eta^2=\eta$。因此，它是 S 内的一个幂等元。由假设，有 $\eta=0$ 或 $\eta=1$。

如果 $\eta=0$，则 $A=0$；如果 $\eta=1$，则 $A=M$，亦即 M 是不可分解的。

推论 5.2.3 令 $S=\mathrm{End}(M_R)$是局部的，则 M_R 是不可分解的。

证明：由定理 5.2.1，只要证明 0 和 1 是 S 内仅有的幂等元就够了。

令 $e\in S$ 是幂等的，则 $1-e$ 也是幂等元。假设 $e\neq0$，$e\neq1$，则也有：$1-e\neq0$，$1-e\neq1$。由于 e 和 $1-e$ 均非可逆，则 S 是局部的，故

$$1=e+1-e$$

也非可逆，矛盾。

如果增加一些条件，则它的逆也成立。

定理 5.2.2　令 $M_R\neq0$ 是有限长度的不可分解模，则 $\mathrm{End}(M_R)$是局部的，且 $\mathrm{End}(M_R)$的非可逆元恰恰是幂等元。

证明：　令 $\varphi\in(M_R)$，则由第 4 章的 4.3，有

$$\exists n\in N,\ M=\mathrm{Im}(\varphi^n)\oplus\mathrm{Ker}(\varphi^n)。$$

由于 M 是不可分解的，于是 $\mathrm{Ker}(\varphi^n)=0$ 或 $\mathrm{Im}(\varphi^n)=0$。

情形 1. $\mathrm{Ker}(\varphi^n)=0\Rightarrow\mathrm{Ker}(\varphi)=0\Rightarrow\varphi$ 是单射，因此，由第 4 章的 4.3，φ 是一个自同构，i. e. φ 是可逆的。

情形 2. $\mathrm{Im}(\varphi^n)=0\Rightarrow\varphi^n=0\Rightarrow1-\varphi$ 是可逆的。

因此，证明了 φ 或$(1-\varphi)$是可逆的，由定理 5.2.1，$\mathrm{End}(M_R)$是局部的。如果 φ 不可逆(情形 2)，则 φ 是幂零的。反之，如果 φ 是幂零的，则 φ 是不可逆的。

作为特殊情形，由这个定理可推出一个结果，那就是单环的自同态环是体。因为单环的唯一幂零自同态，就是零映射。

进一步的情形由下列定理给出：

定理 5.2.3 令 $Q_R\neq 0$ 是不可分解的内射模，则 $\mathrm{End}(Q_R)$ 是局部的。

证明： 令 φ：$Q\to Q$ 是一个单态射，则 $\mathrm{Im}(\varphi)$ 是内射的，因此是 Q 的一个直和项。由于 Q 是不可分解的，因此 $\mathrm{Im}(\varphi)=Q$，i. e. φ 是一个自同构。因此，它在 $\mathrm{End}(Q_R)$ 内是可逆的。所以，Q 的每个非可逆自同态都有不同于零的核。

今令 φ_1，φ_2 是 Q 的两个非可逆自同态，则有 $\mathrm{Ker}(\varphi_1)\neq 0$，$\mathrm{Ker}(\varphi_2)\neq 0$。根据定理 4.5.1，得

$$0\neq \mathrm{Ker}(\varphi_1)\cap \mathrm{Ker}(\varphi_2)\to \mathrm{Ker}(\varphi_1+\varphi_2)$$

i. e. $\varphi_1+\varphi_2$ 不可逆的。由定理 5.1.1，$\mathrm{End}(M_R)$ 是局部的。

根据下一节的克鲁尔－雷马克－施密特定理，哪种模可以分解为带有局部自同态环的子模的直和？关于这个问题，对于下面列出的重要情形，给出了肯定的回答：

(1) M 是诺特环或阿廷环上的内射模；

(2) M 是有限长度的模；

(3) M 是半单模；

(4) M 是投射的，半完善模（M 叫作半完善的，如果 M 的每个满同态像都有投射盖）。

情形(1)由命题 4.5.1 和定理 5.2.3 给出了回答，情形(2)是下面要解决的，情形(3)将在下章解决。限于本书的篇幅，就不准备讨论情形(4)了。

定理 5.2.4 令 $M_R\neq 0$，则：

(1) 令 M 是阿廷或诺特的，则存在 M 的不可分解子模 M_1，M_2，…，M_n，使得

$$M=\bigoplus_{i=1}^{n} M_i。$$

(2) 令 M 是有限长的（i. e. 是阿廷的并且是诺特的），则存在 M 的不可分解子模 M_1，M_2，…，M_n，使得

$$M=\bigoplus_{i=1}^{n} M_i。$$

这里的 $\mathrm{End}(M_i)$ 是局部的（$i=1$，2，…，n）。

证明：

(1) 令 M 是阿廷的，Γ 是 M 的非零直和项 B 的集合。由于 $M\neq 0$，$M=M\oplus 0$，我们有 $M\in\Gamma$。因此，$\Gamma\neq\phi$。令 B_0 是 Γ 中的极小元（按集合的包含关系，下同）则 B_0 是不可分解的，否则 B_0 将不是 Γ 内最小元。令 A 是 M 的子模 C 的集合，使得存在有限多个不可分解子模 $B_1\neq 0$，…，$B_l\neq 0$，满足

$$M = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_l \oplus C.$$

由于 B_0 的存在，$\mathcal{A} \neq \phi$。令 C_0 是 $\mathcal{A}$ 内极小元，且

$$M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n \oplus C_0$$

是对应的分解，因此断言 $C_0 = 0$。否则，作为阿廷模的子模，C_0 仍是阿廷的。则由刚开始的讨论，C_0 将会分裂出非零不可分解的直和项。此与 C_0 的极小性矛盾。

令 M 是诺特的，$\Gamma = \{A \mid A$ 是 M 的直和项且 $A \neq M\}$。由于 $0 \in \Gamma$，故 $\Gamma \neq \phi$。令 A_0 是 Γ 内的极大元(按集合的包含关系)。假设有 $M = A_0 + B_0$。由 A_0 的极大性，B_0 是不可分解的。由于 $A_0 \neq M$，有 $B_0 \neq 0$。令 $\mathcal{A}$ 是 M 的具有这样性质的子模集：第一，这些子模是 M 的直和项；第二，这些子模是有限多个不可分解子模的直和。

由于 $\{0\} \in \mathcal{A}$，故 $\mathcal{A} \neq \phi$，令

$$B_1 + \cdots + B_k = B_1 \oplus \cdots \oplus B_k$$

是 $\mathcal{A}$ 内的极大元。进一步地，令

$$M = B_1 \oplus \cdots \oplus B_k \oplus C_0.$$

假设 $C_0 \neq 0$ 则由前面的讨论，诺特模 C_0 一定含有非 0 的不可分解的直和项。这与 $B_1 \oplus \cdots \oplus B_k$ 的极大性相矛盾。因此，$C_0 = 0$。

5.3 克鲁尔－雷马克－施密特定理

现在来研究重要的克鲁尔－雷马克－施密特定理。

定理 5.3.1 令 $M_R = \bigoplus_{i \in I} M_i$ 与 $M_R = \bigoplus_{j \in J} N_j$，此处的 $\mathrm{End}(M_i)$ 是局部的($\forall i \in I$)，而 $N_j \neq 0$ 是不可分解的($\forall j \in J$)，则存在双射 $\beta: I \to J$，且 $\forall i \in I$，$M_i \cong N_{\beta(i)}$。

现在分几步来进行证明，叙述成引理的形式。

引理 5.3.1 令 $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$，此处 $\mathrm{End}(M_i)$ 是局部的($\forall i \in I$)。设 σ、$\tau \in \mathrm{End}(M)$，且满足 $1_M = \sigma + \tau$，则对每个 $j \in I$，存在 $U_j \subseteq M$ 和一个同构 $\varphi_j: M_j \to U_j$，且 φ_j 是由 σ 或 τ 诱导出来的(i.e. $\varphi_j(x) = \sigma(x)$ 成立，$\forall x \in M_j$；或者 $\varphi_j(x) = \tau(x)$ 成立，$\forall x \in M_j$)使得 $M = U_j \oplus (\bigoplus_{i \in I, i \neq j} M_i)$。

证明：令 $\pi_j: M \to M_j$ 是投影映射，$l_j: M_j \to M$ 是包含映射($\forall j \in I$)。

由 $1_M = \sigma + \tau$ 得 $1_{M_j} = \pi_j 1_M l_j = \pi_j(\sigma + \tau) l_j = \pi_j \sigma l_j + \pi_j \tau l_j$。由于在局部环 $\mathrm{End}(M_j)$ 内，非可逆元构成一个理想，而 1_{M_j} 可逆，故 $\pi_j \sigma l_j$ 与 $\pi_j \tau l_j$ 至少有一个是可逆的，i.e. 是 M_j 的同构。

不妨设 $\pi_j\sigma l_j$ 是一个自同构，则定义

$$U_j = \sigma l_j(M_j) = \sigma(M_j);$$

$$\varphi_j:\ M_j \ni x \mapsto \sigma(x) \in U_j;$$

$$l'_j:\ U_j \ni y \mapsto y \in M。$$

因此，φ_j 是满同态。对 $x \in M_j$，则有

$$l'_j\varphi_j(x) = \varphi_j(x) = \sigma(x) = \sigma l_j(x) \Rightarrow l'_j\varphi_j = \sigma l_j \Rightarrow \pi_j l'_j\varphi_j = \pi_j\sigma l_j。$$

所以，有下面的交换图，如图 5.1 所示。

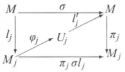


图 5.1

由于 $\pi_j\sigma l_j$ 是自同构，故由下三角的交换性及推论 1.6.3 和 1.6.4 可得

$$M = \mathrm{Im}(l_j'\varphi_j) \oplus \mathrm{Ker}(\pi_j) = U_j \oplus (\bigoplus_{\substack{i\in I\\ i\neq j}}) M_i。$$

引理 5.3.2 假设条件同引理 5.3.1，进一步令 $E = \{i_1, \cdots, i_t\} \subset I$，则存在 $C_{i_j} \to M$，$j = 1, 2, \cdots; t$ 和同构 γ_{ij}：$M_{i_j} \to C_{i_j}$；γ_{i_j} 是由 σ 和 τ 诱导出的，从而有

$$M = C_{i_1} \oplus \cdots \oplus C_{i_t} \oplus (\bigoplus_{\substack{i\in I\\ i\notin E}} M_i)。$$

证明： 利用引理 5.3.1，可相继地确定出 C_{i_j}，对引理 5.3.1 中的 $i_1 = j$，令 $C_{i_1} = U_{i_1}$。于是，有 $M = C_{i_1} \oplus (\bigoplus_{\substack{i\in I\\ i\neq i_1}} M_i)$，由于 $M_{i_1} \cong C_{i_1}$，故 $\mathrm{End}(C_{i_1})$ 也是局部的。在这个分解中，利用引理 5.3.1 交换 M_{i_2}，则相应地有 C_{i_2}。注意，这里的 C_{i_2} 不一定等于 U_{i_2}，这是因为现在的分解是 M 上的另一个分解，t 步后(例如用归纳法)就得到了所要的结果。

引理 5.3.3 令 $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$，此处 $\mathrm{End}(M_i)$ 是局部的($\forall i \in I$)。令 $M = A \oplus B$，此处 $A \neq 0$，且是不可分解的，π'：$M \to A$ 是相应的投影映射，则存在一个 $k \in I$ 使得 π' 诱导出 M_k 到 A 上的同构，并且 $M = M_k \oplus B$ 成立。

证明： 令 l：$A \to M$ 是一个包含映射，$\pi = l\pi'$。由于 $1_M = \pi + (1_M - \pi)$，令 $\sigma = \pi$，$\tau = 1 - \pi$。由引理 5.3.1，因为 $A \neq 0$，存故在 $0 \neq a \in A$ 使得 $\pi(a) = a$。于是，$(1_M - \pi)(a) = 0$。

令 $a = \sum_{j=1}^{t} m_{i_j}$(这里 $0 \neq m_{ij} \in M_{i_j}$，$i_j \in I$)是 a 在 $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ 里的唯一表示。

在引理 5.3.2 的意义下，令模 C_{i_j} 和同构 γ_{i_j} 是确定好了的。假设 γ_{i_j} 全是由 $1_M - \pi$ 诱导出来的，则有

$$0=(1_M-\pi)(a)=\sum_{j=1}^{t}(1_M-\pi)(m_{i_j}),$$

且 $(1_M-\pi)(m_{i_j})=\gamma_{i_j}(m_{i_j})\in C_{i_j}$。由于 C_{i_j} 的和是直和，这就蕴含着 $\gamma_{i_j}(m_{i_j})=0$。因此，$m_{i_j}=0$，从而 $a=0$，矛盾。所以，至少有一个 i_j 使得 γ_{i_j} 是由 π 诱导出的，记为 k，则

$$\gamma_k:\ M_K\ni x\mapsto\pi(x)\in C_k$$

是同构。又由引理 5.3.2，C_k 是 M 的直和项。令 $M=C_k\oplus L$，进一步地有：

$$C_k=\pi(M_k)\hookrightarrow\pi(M)=A。$$

于是，$A=M\cap A=(C_k\oplus L)\cap A=C_k\oplus(L\cap A)$。

由于 A 是不可分解的，故 $C_k\neq 0$（因 $M_k\neq 0$），于是就推得 $A=C_k$。

由交换图图 5.2（其中 l：$M_k\to M$ 是包含映射）及引理 1.6.1 的推论知

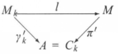


图 5.2

$$M=\mathrm{Im}(l)\oplus\mathrm{Ker}(\pi')=M_k\oplus B。$$

定理 5.3.1 的证明：由引理 5.3.3，取 $A=N_j$，每个 N_j 同构于 M_{i_j}。因此，$\mathrm{End}(N_j)$ 是局部的，从而假设是对称的。今在 I 和 J 中引入等价关系。事实上，令

$$i_1\sim i_2:\Leftrightarrow M_{i_1}\cong M_{i_2}(i_1,\ i_2\in I);$$

$$j_1\sim j_2:\Leftrightarrow N_{j_1}\cong N_{j_2}(j_1,\ j_2\in J)。$$

对 $i\in I$，设 $\bar{i}$ 是由 i 确定的等价类，令 $\bar{I}$ 是所有等价类集，对 J 也有类似的记号。

令 Φ：$\bar{I}\to\bar{J}$ 定义为：$\Phi(\bar{i})=\bar{j}$，若 $M_i\cong N_j$。断言 Φ 是一个双射。由引理 5.3.3，取 $A=M_i$，$M=\oplus N_j$，存在 $j\in J$ 使得 $N_j\cong M_i$。由于同构是一个等价关系，Φ 独立于代表元的选择，亦即 Φ 是一个映射。

Φ 是单射。因为由 $\Phi(\bar{i_1})=\bar{j_1}=\bar{j_2}=\Phi(\bar{i_2})$ 得 $M_{i_1}\cong N_{j_1}\cong N_{j_2}\cong M_{i_2}$。因此，$\bar{i_1}=\bar{i_2}$。由引理 5.3.3，$\Phi$ 也是满射（$A=N_j$）。

剩下的要证明，对每个 $i\in I$，$\exists$ 双射 β_i：$\bar{i}\to\Phi(i)$，则 β：$I\ni i\to\beta_i(i)\in J$ 就是所要的双射且 $M_i\cong N_{\beta(i)}$。由施罗德－伯恩斯坦定理（可在任一本集合论书上找到）只要证明存在单射 $\bar{i}\to\Phi(i)$ 和单射 $\Phi(i)\to\bar{i}$ 就够了。

由于假设是对称的，故只要证明一方面的单射，例如 $\Phi(i)\to\bar{i}$ 就够了。

情形 1. $\bar{i}$ 是有限的，不妨设 $\bar{i}$ 中元的个数为 t，进一步地令 $E=\{i_1,\ \cdots,\ j_s\}\subset\Phi(i)$。由引理 5.3.3（取 $A=N_{j_1}$），存在 M_{i_1} 使 $M_{i_1}\cong N_{j_1}$，亦即 $i_1\in\bar{i}$ 和 $M=M_{i_1}\oplus(\bigoplus_{\substack{j\in J\\ j\neq j_1}}N_j)$，由引理 5.3.3，取 $A=N_{j_2}$ 与 $B=M_{i_1}\oplus(\bigoplus_{\substack{j\in J\\ j\neq j_1,j\neq j_2}}N_j)$，则存在一个 M_{i_2}，使 $M_{i_2}\cong N_{j_2}$，亦即

$i_2 \in \bar{i}$ 和 $M = M_{i_1} \oplus M_{i_2} \oplus (\bigoplus_{\substack{j \in J \\ j \neq j_1, j \neq j_2}} N_j)$。因此相继得到

$$M = M_{i_1} \oplus \cdots \oplus M_{i_s} \oplus (\bigoplus_{j \in J, j \notin E} N_j) \wedge M_{i_l} \cong N_{jl} \quad (l = 1, 2, \cdots, s)。$$

因为这个和是直和，故 M_{i_1}，…，M_{i_s} 是两两不同的。因此有 $s \leqslant t$。所以 $\Phi(i)$ 的元个数不大于 t，从而结论得证。

情形 2. $\bar{i}$ 是无限的，设 π'_j：$M \to N_j$ 是投影映射。对 $k \in I$，令

$$E(k) = \{j | j \in J \wedge \pi'_j \text{诱导出 } M_k \text{ 到 } N_j \text{ 上的同构}\}。$$

断言：对所有的 $k \in I$，$E(k)$ 是有限的。

令 $0 \neq m \in M_k$，$\wedge\ m = \sum_{l=1}^{t} n_{j_l}$，$0 \neq n_{i_l} \in N_{j_l} \Rightarrow x'_{j_l(m)} = n_{j_l}$；若使 π'_j 诱导出同构，就必须有 $\pi'_j(m) \neq 0$，即 $j \in \{j_1, \cdots, j_t\}$，从而 $E(k)$ 是有限的。

我们断言：$\Phi(i) = \bigcup_{k \in I} E(k)$。

"$\Phi(i) \supset \bigcup_{k \in \bar{i}} E(k)$"：令 $k \in \bar{i}$，$j \in E(k)$。

$$\left.\begin{array}{l} k \in \bar{i} \Rightarrow M_k \cong M_i \\ j \in E(k) \Rightarrow M_k \cong N_j \end{array}\right\} \Rightarrow M_i \cong N_j \Rightarrow j \in \Phi(i)。$$

"$\Phi(i) \subset \bigcup_{k \in \bar{i}} E(k)$"：$j \in \Phi(i) \Rightarrow M_i \cong N_j$。由引理 5.3.3，$\exists k \in I$ 使得 π'_j 诱导出 M_k 到 N_j 上的同构。于是，$M_i \cong N_j \Rightarrow M_k \cong M_i \Rightarrow k \in \bar{i} \wedge j \in E(k)$。令 $\bigcup_{K \in i} E(k)$ 是 $E(k)$ 的不相交并，则存在一个单射 $\Phi(i) = \bigcup_{k \in \bar{i}} E(k) \to \bigcup_{K \in i} E(k)$。由于每个 $E(k)$ 是有限的，故对每个 $E(k)$，存在到 N 内的一个单射。因此，存在单射

$$\bigcup_{K \in i} E(k) \to \bar{i} \times N。$$

由于 $\bar{i}$ 是无限的，由已知的集合论的结果，存在 $\bar{i} \times N \to \bar{i}$ 的双射，所有的单射合在一起就产生了 $\Phi(\bar{i}) \to \bar{i}$ 的单射。故得证克鲁尔 - 雷马克 - 施密特定理。

推论 5.3.1 令 $M = \oplus M_i$，此处 $\mathrm{End}(M_i)$ 对所有的 i 是局部的，令 $N = \bigoplus_{j \in J} N_j$，此处 N_j 是不可分解的，对所有的 j，$N_j \neq 0$ 且 $M \cong N$，则存在一个双射 β：$I \to J$ 使得 $M_i \cong N_{\beta(i)}$，$\forall i \in I$。

证明：令 σ：$N \to M$ 是一个同构，则有

$$M = \bigoplus_{j \in J} \sigma(N_j)。$$

式中，$\sigma(N_j)$ 是不可分解的。由定理 5.3.1（$M = \oplus \sigma(N_j)$ 代替了 $M = \oplus N_j$）可知：$\forall i \in I, M_i \cong \sigma(N_{\beta(i)}) \cong N_{\beta(i)}$。

推论 5.3.2 若诺特环上的内射模或有限长度的模分解为不可分解子模的直和，则这个分解在克鲁尔 - 雷马克 - 施密特定理的意义下是唯一的。

证明：由命题 4.5.1 和定理 5.2.3 与定理 5.2.4 即得证。

习题 5.3

1. 设 $M=M_R$，令 $n\in N$，设 $M^n=M^{\{1,2,\cdots,n\}}=\bigsqcup_{i\in I}^{n}A_i$，其中 $A_i=M(i=1,2,\cdots,n)$，假设

$$A_R=\bigoplus_{i\in I}A_i,\ B_R=\bigoplus_{j\in J}B_j。$$

这里 $\mathrm{End}(A_i)$ 是局部的($\forall i\in I$)，B_j 是不可分解的($\forall j\in J$)。

证明：

(1)令 $n\in\mathbb{N}$，由 $A^n\cong B^n\Rightarrow A\cong B$。

(2)令 I 是有限的，且设 S，T 是非空的，由 $A^{(S)}\cong A^{(T)}\Rightarrow S$ 与 T 有相同的基数。

2. 满足习题 4.4.2 的题中等价条件的模 M，称为是有限维的。若内射包 $I(M)$ 分解为不可分解模的直和，其不可分解直和项个数称为 M 的维数，记为 $\dim(M)$。证明：

(1) $\dim(M)=0\Leftrightarrow M=0$，$\dim(M)=1\Leftrightarrow M$ 是不可约的，并且 $M\neq 0$。

(2) M 是有限维的，并且 $U\hookrightarrow M\Rightarrow U$ 是有限维的，并且 $\dim(U)\leqslant\dim(M)$。

(3)若 M 是有限维的且 $U\hookrightarrow M$，则 $U\overset{*}{\hookrightarrow}M\Leftrightarrow\dim(U)=\dim(M)$。

(4) M_1 与 M_2 是有限维的，则 $M_1\oplus M_2$ 是有限维的，且 $\dim(M_1\oplus M_2)=\dim(M_1)+\dim(M_2)$。

(5)若 $X\hookrightarrow M$，并且 X 与 M/X 均是有限维的，则 M 也是有限维的，且 $\dim(M)\leqslant\dim(X)+\dim(M/X)$。

第 6 章　单模与半单模

6.1　定义和特征

关于向量空间的概念，有两个重要的推广，它们是：

(1) 自由模的直和项，称为投射模。

(2) 每个子模均是直和项的模，称之为半单模。本章主要是讨论它，先列出几个引理。

引理 6.1.1　令 $M = M_R$ 是一个模，它的每个子模都是其直和项，则每个非零子模均含有一个单子模。

引理 6.1.1 的证明留给读者作为习题。

引理 6.1.2　令 $M = \sum_{i \in I} M_i$，其中 M_i 是单子模，设 $U \hookrightarrow M$，则有：

(1) 存在 $J \subset I$，使得 $M = U \oplus (\bigoplus_{i \in J} M_i)$。

(2) 存在 $K \subset I$，使得 $U \cong \bigoplus_{i \in K} M_i$。

证明：

(1) 利用佐恩引理来进行证明。令

$$\Gamma = \{L \mid L \subset I \wedge U + \sum_{i \in L} M_i = U \oplus (\bigoplus_{i \in L} M_i)\}。$$

由于 $\bigoplus_{i \in \phi} M_i = 0$，故 $\phi \in \Gamma$，从而 $\Gamma \neq \phi$。利用包含关系将 Γ 偏序化。

设 Λ 是 Γ 的全序子集，断言 $L^* = \bigcup_{L \in \Lambda} L$ 是 Λ 在 Γ 内的上界。显然 L^* 是上界。剩下要证明的是 $L^* \in \Gamma$。

令 $E \subset L^*$，E 是有限的，则存在 $L \in \Lambda$ 使得 $E \subset L$。今设

$$u + \sum_{i \in E} m_i = 0，\ u \in U，\ m_i \in M_i。$$

于是，由 $E \subset L$，得 $u = m_i = 0$，$\forall i \in E$。因此，有

$$U+\sum_{i\in L^*}M_i=U\oplus(\bigoplus_{i\in L^*}M_i)。$$

故 $L^*\in\Gamma$。由佐恩引理，存在一个极大子集 $J\in\Gamma$。令

$$N=U+\sum_{i\in J}M_i=U\oplus(\bigoplus_{i\in J}M_i)=U\oplus(\bigoplus_{i\in J}M_i)。$$

今对 $\forall i_0\in I$，考虑 $N+M_{i_0}$，则 $N+M_{i_0}=N\oplus M_{i_0}$ 是不可能的，因为有 $J\subsetneq J\cup\{i_0\}\in\Gamma$。于是，$N\cap M_i\neq 0$。由于 M_{i_0} 是单的，一定有 $N\cap M_{i_0}=M_{i_0}$。因此，$M_{i_0}\hookrightarrow N_0$。故 $M=\sum_{i\in I}M_i\hookrightarrow N\hookrightarrow M$，i. e. $N=M$。

(2)令 $M=U\oplus(\bigoplus_{i\in J}M_i)$。则将(1)应用于子模 $\bigoplus_{i\in J}M_i$ 上，那么存在 $K\subset I$，使得 $M=(\bigoplus_{i\in J}M_i)\oplus(\bigoplus_{i\in K}M_i)$。由第一同构定理得

$$U\cong M/(\bigoplus_{i\in J}M_i)\cong\bigoplus_{i\in K}M_i。$$

现在来看半单模的主要定理。

定理 6.1.1　对模 $M=M_R$，下列条件是等价的：

(1)M 的每个子模是单子模的和；

(2)M 是单子模的和；

(3)M 是单子模的直和；

(4)M 的每个子模是 M 的直和项。

证明：

“(1)⇒(2)”：显然。

“(2)⇒(3)”：取引理 6.1.2 的(1)中的 $U=0$，即得(3)。

“(3)⇒(4)”：引理 6.1.2 的(1)。

“(4)⇒(1)”：令 $U\hookrightarrow M$，置 $U_0=\sum_{\substack{M_i\text{是单的}\\ M_i\hookrightarrow U}}M_i$，则 $U_0\hookrightarrow U$。由(4)，U_0 是 M 的直和项：$M=U_0\oplus N\Rightarrow U=M\cap U=U_0\oplus(N\cap U)$。

情形 1. $N\cap U=0\Rightarrow U=U_0\Rightarrow$ (1)。

情形 2. $N\cap U\neq 0\Rightarrow$ 由引理 6.1.1，存在一个单子模 $B\hookrightarrow N\cap U\Rightarrow B\hookrightarrow U_0$。由 U_0 的定义，有 $B\hookrightarrow U_0\cap(N\cap U)=0$，矛盾。故只有第一种情形出现。

定义 6.1.1

(1)模 $M=M_R$ 叫作半单的 :⇔ M 满足定理 6.1.1 的条件。

(2)环 R 叫作右或左半单的 :⇔ R_R 或 ${}_RR$ 是半单的。

显然，零模是半单的，因为 $0=\sum_{i\in\phi}M_i$，M_i 半单。但零模不是单模，因为单模的定义中要假设 $M\neq 0$。

例子如下：

1. 每个斜域 K 上的向量空间 $V=V_K$ 是半单的。这是因为 $V_K=\sum_{x\in V}xK$。而当 $x\neq 0$ 时，xK 是单的。

2. 当 $n\neq 0$ 时，$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 是半单 $\mathbb{Z}$ - 模 $\Leftrightarrow n$ 是平方自由的(i. e. n 是两两不同素数之积)，或者 $n=\pm 1$。

"$\Leftarrow$"：当 $n=\pm 1$ 时，$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=\{0\}$，而零模是半单的。

当 $n=p_1\cdots p_2\cdots p_s$ 时，令 $q_i=n/p_i$，则 $(q_1, q_2, \cdots, q_s)=1$。于是，$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=\sum_{i=1}^{s}q_i\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$，而 $q_i\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 是单子模。所以，$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 是半单的。

"$\Rightarrow$"：若 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=\{0\}\Rightarrow n=\pm 1$。所以只要假设 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\neq 0$，从而知 $n\neq 1$。若 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\neq\{0\}$ 是半单的，假设 $n=p_1^{r_1}\cdots p_s^{r_s}$，则 $\mathbb{Z}/(n)/(p_i)/(n)\cong\mathbb{Z}/(p_i)$ 是域或 $(p_i)/(n)$ 是极大理想。设 $(m)/(n)$ 也是 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 的极大理想，故 $\mathbb{Z}/(n)/(m)/(n)\cong\mathbb{Z}/(m)$ 是单的，从而为域。因此，m 为素数，即 $(p_i)/(n)$ 是 $\mathbb{Z}/(n)$ 的所有极大理想。于是，由下一章的定理 7.2.1(1)，有 $\mathrm{Rad}\mathbb{Z}/(m)=\cap(p_i)/(n)=(p_1p_2\cdots p_s)/(n)=0\Rightarrow n=p_1p_2\cdots p_s$。

3. $\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}}$ 和 $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ 均是非半单的，因为它们没有单子模。

4. 令 $V=V_K$ 是一个向量空间。则有：$\mathrm{End}(V_K)$ 是半单环 $\Leftrightarrow \dim(V_K)<\infty$。

推论 6.1.1

(1)半单模的每个子模是半单的。

(2)半单模的每个同态像是半单的。

(3)半单模的每个和都是半单的。

(4)半单模到单模的任两个分解在克鲁尔 - 雷马克 - 施密特定理的意义下是同构的。

证明：

(1)由定理 6.1.1 可得证。

(2)令 A 是单的，α：$A\to B$ 是满同态，则 $A/\mathrm{Ker}(\alpha)\cong B$。如果 $\mathrm{Ker}(\alpha)=0$，则 B 是单的。如果 $\mathrm{Ker}(\alpha)=A$，则 $B=0$。由于 A 是单的，故 $\mathrm{Ker}(\alpha)$ 没有别的可能了。单模的和在同态下的像是单模与零模的和，而零模可略去。由定理 6.1.1，这仍是一个半单模。

(3)由定理 6.1.1 即得证。

(4)由于单模的自同态环是一个体，因此是局部的，从而克鲁尔 - 雷马克 - 施密特定理成立。

下面的定理表明，对于半单模来说，所有的有限条件是等价的。

定理 6.1.2 对于半单模 $M=M_R$，下列条件是等价的：

(1) M 是有限多个单模的和。

(2) M 是有限多个单模的直和。

(3) M 有有限长度。

(4) M 是阿廷的。

(5) M 是诺特的。

(6) M 是有限生成的。

(7) M 是有限余生成的。

证明：对于 $M=0$，所有的叙述均是平凡的。假设 $M\neq 0$。

"(1)⇒(2)"：由引理6.1.2得证。

"(2)⇒(3)"：令 $M=\bigoplus_{i=1}^{n}M_i$，M_i 是单的，则 $0\hookrightarrow M_1\hookrightarrow M_1\oplus M_2\hookrightarrow\cdots\hookrightarrow\bigoplus_{i=1}^{n}M_i=M$ 是一个合成列。这是因为 $M_1\oplus M_2\oplus\cdots\oplus M_i/M_1\oplus\cdots\oplus M_{i-1}\cong M_i$ 是单的。

"(3)⇒(5)"
"(5)⇒(6)"}：由定理4.1.1得证。

"(6)⇒(1)"：由定理1.2.1得证。

"(3)⇒(4)"
"(4)⇒(7)"}：由定理4.1.1得证。

"(7)⇒(2)"：假设 M 是无限多个单子模 M_i 的直和，则 M 存在形如 $M_1\oplus M_2\oplus\cdots\oplus M_n$ 的子模，且直和项 M_1，M_2，…是可数无限多个。令

$$A_i=\bigoplus_{j=i}^{\infty}M_j,\ i\in\mathbb{N},$$

则显然有 $\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=0$。因为对任 $n\in\mathbb{N}$，$(M_1\oplus\cdots\oplus M_n)\cap A_{n+1}=0$。因此，$(M_1\oplus\cdots\oplus M_n)\cap(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i)=0$。但是，任有限多个 A_i 之交显然等于带有最大指标 i 的那个 A_i。因此，不等于0。这与 M 是有限余生成的矛盾。

今令 M_R 是半单的，Γ 表示 M 的所有单子模集，即 $\Gamma=\{E\mid E\hookrightarrow M\wedge E$ 是单的$\}$。

那么，$\cong$ 是 Γ 上的等价关系。令等价类的集(令称之为同构类)是 $\{\Omega_j\mid j\in J\}$。所以 Ω_j 是同构类。因此有 $\Omega_{j_0}\cap\Omega_{j_1}=\phi(j_0,\ j_1\in J,\ j_0\neq j_1)$。

定义6.1.2 $B_j=\sum_{E\in\Omega_j}E$，称为 M 的齐次分支。

引理6.1.3 令 M_R 是半单的，B_j 是 M 的齐次分支，那么有

(1) $U\hookrightarrow B_j\wedge U$ 是单的 $\Rightarrow U\in\Omega_j$。

(2) $M=\bigoplus_{j\in J}B_j$。

证明：

(1)由引理6.1.2(2)可证(1)因此存在 $E\in\Omega_j$ 使得 $U\cong E$。由于 E 是单的，没有更

多的直和项出现在 E 里。

(2)由于 M 是单子模的和，每个单子模含于 Ω_j 内。于是，$M=\sum_{j\in J}B_j$。假设对 $j_0\in J$，有 $D=B_{j_0}\cap\sum_{\substack{j\in J\\ j\neq j_0}}B_j\neq 0$。那么由引理6.1.1，存在 D 的单子模 E。由于 $E\hookrightarrow B_{j_0}$，故由(1)知，$E\in\Omega_{j_0}$。由于 $E\hookrightarrow\sum_{j\neq j_0}B_j$，故由引理6.1.2(2)知，存在 $j_1\in J$ 且 $j_1\neq j_0$，使 $E\in\Omega_{j_1}$。此与 $\Omega_{j_0}\cap\Omega_{j_1}=\phi$ 矛盾。

如果在一个具体的情况中，要确定一个模是否为半单的是很困难的，而且要依赖于很特殊的性质。根据这个观点，考虑一个很有趣的，也很重要的例子，令 $R=GK$ 是群 G 在一个域 K 上的有限群的群环。

定理 6.1.3 (马施克定理)R_R 和 ${}_RR$ 半单 $\Leftrightarrow$ K 的特征不是 G 的秩的因子。

证明：

"$\Leftarrow$"：设 K 的特征不是 $n=\mathrm{Ord}(G)$ 的因子，则对 $0\neq k\in K$，$nk=k+k+\cdots+k$(n 个分量)是可逆的，记 $n\cdot 1(1\in K)$ 的逆元为 $\frac{1}{n}$。令 G 的元为 g_1，g_2，…，g_n。如果把 R 仅看作 K 上的右向量空间，对每个 $\varphi\in\mathrm{End}(R_K)$，定义映射 $\hat{\varphi}$：$R\to R$ 如下：

$$\hat{\varphi}(r)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(rg_i)g_i^{-1},\ r\in R。$$

我们需要证明 $\hat{\varphi}\in\mathrm{End}(R_R)$，对 $\forall k\in K$，有

$$\hat{\varphi}(rk)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(rkg_i)g_i^{-1}=\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(rg_i)g_i^{-1}\right]k=\hat{\varphi}(r)k。$$

今令 $g\in G$，因为 $\{gg_1,\cdots,gg_n\}=\{g_1,g_2,\cdots,g_n\}$，有

$$\hat{\varphi}(rg)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(rgg_i)g_i^{-1}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi(rgg_i)(gg_i)^{-1}g=\hat{\varphi}(r)g。$$

因此有 $\hat{\varphi}(rx)=\hat{\varphi}(r)x$ $(\forall r,x\in R)$。i. e. $\hat{\varphi}\in\mathrm{End}(R_R)$。

今令 $A\hookrightarrow R_R$，则 A 也是 R_K 的子空间。因此存在 $B\hookrightarrow R_K$，使得 $R_K=A\oplus B$(作为向量空间的直和)。令 π：$B_K\to A$ 是 R 到 A 上的投影满射，i. e. $\pi(a+b)=a$ $(\forall a\in A,b\in B)$。由于 $A\hookrightarrow R_R$，故对 $a\in A$，有

$$\hat{\pi}(a)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\pi(ag_i)g_i^{-1}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}ag_ig_i^{-1}=\frac{1}{n}\cdot na=a。$$

对 $r\in R$，有 $\hat{\pi}(r)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\pi(rg_i)g_i^{-1}\in A$。

这是因为 $\pi(rg_i)\in A$，所以 $\hat{\pi}$ 是 R_R 到 A 上的投影满射。于是

$$R_R=\hat{\pi}(R)\oplus(1-\hat{\pi})(R)=A\oplus(1-\hat{\pi})(R)。$$

因此 R_R 是半单的。

类似地可对 ${}_RR$ 进行证明。

"⇒"：今令 K 的特征为 p，且 p 是 n 的因子，则对 $r_0=g_1+\cdots+g_n$，那么来证明理想 r_0R 不是 R_R 的直和项。对 $g\in G$，首先有 $r_0g=r_0$，因此，$r_0^2=nr_0=0$ 及 $r_0R=r_0K$。假设 $R_R=r_0R\oplus U_1$，那么一定存在一个幂等元 e，使得 $eR=e_0R=r_0K$。于是，由 $e=r_0k_0$ $(k_0\in K)$ 得 $e=e^2=r_0^2k^2=0$，因此 $r_0=0$，矛盾。

推论 6.1.2 令 R 是一个具有单右理想 E 的单环，R 是域 H 上的有限维代数，则存在子域 $K_0\hookrightarrow K=\mathrm{End}(E_R)$ 使成立 $\dim_{K_0}(K)<\infty$，且 K_0 与 H 同构。

如果 H 是代数封闭的，则有 $H\cong K=\mathrm{End}(E_R)$。

证明：设 $h\in H$，令 $h_E^{(r)}$：$E\ni x\mapsto xh\in E$。则对 $r\in R$，由于 $(xh)r=(xr)h$，有 $h_E^{(r)}\in K$。所以

$$\psi:\ H\ni h\mapsto h_E^{(r)}\in K$$

是一个环同态。令 $K_0=\mathrm{Im}(\psi)$。由假设 R_H 是有限维的，从而 E_H 亦是有限维的。

由于 $h_E^{(r)}(x)=xh\quad(\forall h\in H,\ x\in H)$，$E_H$ 在 H 上的基也是 ${}_{K_0}E$ 在 K_0 上的基。因此 ${}_{K_0}E$ 也是有限维的。所以，由于 $\dim_{K_0}(K)\cdot\dim_K(E)=\dim_{K_0}(E)$，${}_{K_0}K$ 也是有限维的。

因为 K 是 K_0 的有限维代数扩域，所以，H 若是代数闭的，则 K_0 也是代数闭的，即 $K_0=K$。于是，$H\cong K_0=K$。

习题 6.1

1. 证明引理 6.1.1。

2. (1) 令 p 是一个素数，$n\in N$，$\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ 的最大半单子模是什么？

(2) 使得 $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})/U$ 是半单的最小 $\mathbb{Z}$-子模 U 为何？

(3) 找出一个模 M 和 $U\hookrightarrow M$，使 M 非半单模但 M/U 和 U 是半单的。

3. 令 M_R 是仅有有限多个齐次分支的半单 R-模：

$$M_R=\bigoplus_{j=1}^{n}B_j$$

证明：(1) $S=\mathrm{End}(M_R)=\bigoplus_{j=1}^{n}S_j$，此处 S_j 是 S 的两边理想，且 $S_j\cong\mathrm{End}(B_{jR})$。

(2) 如果 M_R 是有限生成的，则 S 是半单的。

(3) 如果 M_R 是有限生成的且所有单子模是同构的，则 S 是单的和半单的。

(4) 如果 M_R 不是有限生成的，则 S 既非单的也非半单的。

4. 令 $M=M_R$ 是半单的，$S=\mathrm{End}(M_R)$，证明：${}_SM$ 是半单的。

6.2 半 单 环

若一个环在一边具有某种性质，那么，一般来说，这个环在另一边不一定还具有这种性质。例如，左阿廷环就不一定是右阿廷环。所以，我们自然要问：什么样的性质对于环 R 的两边都是存在的？关于此，有以下定理：

定理 6.2.1 对于环 R，有：R_R 是半单的 $\Leftrightarrow {}_RR$ 是半单的。

证明 只需证${}_RR$ 是半单的$\Rightarrow R_R$ 是半单的即可，因为"$\Leftarrow$"的证明是类似的。

由引理 5.2.1，半单模${}_RR$ 有分解

$$ {}_RR = \bigoplus_{i=1}^{n} L_i = \bigoplus_{i=1}^{n} Re_i , $$

式中，L_i 是${}_RR$ 的单子模，且 $e_i \neq 0$，$e_ie_j = \begin{cases} e_i, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$，$L_i = Re_i$，$1 = \sum_{i=1}^{n} e_i$。再由引理 5.2.1(4)知，$R_R$ 有分解

$$ R_R = \bigoplus_{i=1}^{n} e_iR。 $$

因此只需证明，所有的 e_iR 均是单的。为此，设 e 是 $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ 中的一个。令 $0 \neq a = ea \in eR$，则有 $aR \hookrightarrow eR$。因为希望证明 $aR = eR$。由此，可知 eR 是单子模。

由于 $ea \neq 0$ 且 Re 是单子模，令

$$ \varphi: Re \ni re \mapsto rea = ra \in Ra。 $$

则易证 φ 是一个同构。再令${}_RR = Ra \oplus U$，则

$$ \psi: R = Ra \oplus U \ni ra + u \mapsto \psi^{-1}(ra) = re \in R $$

是${}_RR$ 的一个自同态。它是由 R 中一个元素 b 确定的右乘映射。因 $R^{(l)} = \mathrm{End}({}_RR)$(见 1.8 节)，于是，$e = \psi(a) = ab$。所以，$e \in aR$，即 $eR \hookrightarrow aR$，从而 $eR = aR$。

有了这个定理，就有以下定义：

定义 6.2.1 环 R 称为是半单的，如果 R_R 是半单的。

于是，有以下推论：

推论 6.2.1

(1) R 是半单的 $\Leftrightarrow$ 每个右或左 R 模是半单的。

(2) R 是半单的 $\Rightarrow {}_RR$ 与 R_R 有相同的长度。

(3) R 是半单的，且 $\rho: R \to S$ 是满的环同态 $\Rightarrow S$ 是半单的。

(4) R 是半单的 $\Leftrightarrow$ 每个右 R－模和左 R－模均是内射模。

(5) R 是半单的 $\Leftrightarrow$ 每个右 R - 模和左 R - 模均是投射模。

(6) R 是半单的 $\Leftrightarrow$ 每个单右 R - 模和单左 R - 模均是投射模。

证明：

(1)"$\Rightarrow$"：若 R_R 是半单的，令 $M = M_R$ 是一个右 R - 模，$\forall m \in M$，则由定理6.1.1的推论，mR 作为 R_R 的同态像是半单的。因此，$M = \sum_{m \in M} mR$ 作为半单模的和仍是半单的。对左边的情形可类似地证明。

"$\Leftarrow$"：显然。

(2)这个结论已含于定理6.2.1的证明中。因为，对于单子模 Re_i，e_iR 也是单的。

(3) $\forall s \in S$，$r \in R$，令 $sr = s\rho(r)$，则 S_S 成为 R - 模。所以，S_S 的子模与 S_R 的子模相吻合。由于 S_R 是半单的，故 S_S 也是半单的。

(4) R_R 是半单的 $\Rightarrow$ 每个右 R - 模是半单的 $\Rightarrow$ 每个子模是直和项 $\Rightarrow$ 每个右 R - 模是内射的(由内射模的定义可知) $\Rightarrow$ R 的每个右理想是 R_R 的直和项 $\Rightarrow$ R_R 是半单的。类似地可对左边进行证明。

(5)类似(4)的证明。

(6)"$\Rightarrow$"：由(5)显然可得证。

"$\Leftarrow$"：令 $\mathrm{Soc}(R_R)$ 是 R 的所有单右理想的和，要证 $\mathrm{Soc}(R_R) = R$。假设 $R \neq \mathrm{Soc}(R_R)$，则由定理1.2.1，$\mathrm{Soc}(R_R)$ 含于 R 的一个极大右理想 A 内。因为 R/A 是单右 R - 模，故由假设知 R/A 是投射 R - 模。所以，存在同态 φ 使图6.1交换。于是，$\varphi \neq 0$，且 $R = \mathrm{Im}(\varphi) + A$。但由于 $\mathrm{Im}(\varphi)$ 是单的，则有 $\mathrm{Im}(\varphi) \hookrightarrow \mathrm{Soc}(R_R) \hookrightarrow A$。从而，$v\varphi = 0$，矛盾。因此，$R = \mathrm{Soc}(R_R)$ 为半单的。

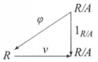


图6.1

下面希望把半单环 R 分解为非直和分解的两边理想的直和。因 R 是半单的，故令 $R = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_m$ 为 R_R 到它的齐次分支的分解。由引理5.2.1，齐次分支的个数是有限的。因此希望证明 $B_j (j = 1, 2, \cdots, m)$ 是两边单理想，且互相零化。

引理6.2.1 令 $A \hookrightarrow R_R$，且 A 是 R_R 的直和项，则由 A 生成的两边理想 RA 含有 R 的所有作为 A 的满同态像的右理想。

证明：

令 $R_R = A \oplus B$，设 π：$R \to A$ 是投影映射。进一步，令 α：$A \to A'$ 是满同态且 $A' \hookrightarrow R_R$。令 i：$A' \to R_R$ 是包含映射。于是，$i\alpha\pi \in \mathrm{Hom}_R(R_R, R_R)$。由1.8节知，$R_R$ 的每个自同

态由 R 的一个左乘映射给出。从而，存在 $c\in R$ 使 $c^{(l)}=i\alpha\pi$。因此，从 $\pi(R)=\pi(A)$ 得 $A'=i\alpha\pi(R)=i\alpha\pi(A)=cA\subset RA$。

定理 6.2.2 令 $R\neq 0$ 是半单环，令 $R_R=B_1\oplus B_2\oplus\cdots\oplus B_m$ 与 ${}_RR=C_1\oplus C_2\oplus\cdots\oplus C_n$ 分别为 R_R 与 ${}_RR$ 分解为齐次分支的直和。则

(1) B_j，$j=1$，2，…，m 是 R 的单的双边理想。

(2) $n=m$，且适当调整次序有 $B_j=C_j$，1，2，…，m

(3) $B_iB_j=\begin{cases}B_i, & i=j\text{ 时}\\ 0, & i\neq j\text{ 时}\end{cases}$，对 i，$j=1$，2，…，m。

(4) 若视 B_i 为一个环，则 B_i 是有单位元的环。

(5) R 到单的两边理想的直和分解是唯一确定的。

证明：

(1) 若 $E\hookrightarrow B_i$ 且 E 是单的，则 $RE=B_i$。事实上，$\forall r\in R$，则映射 φ：$E\ni x\mapsto rx\in rE$ 是一个满同态。因 E 是单的，φ 是零映射，即 $rE=0$，或者 φ 是一个同构。即 $E\cong rE$。因此，有 $rE\hookrightarrow B_i$。反之，令 $E\cong E'$，则由引理 6.2.1 知 E' 有形式 $E'=rE$，从而 $B_i\hookrightarrow RE$。于是就有 $RE=B_i$。

由 $B_i=\sum\limits_{E\in\Omega_i}E$ 知，$RB_i=\sum\limits_{E\in\Omega_i}RE=\sum\limits_{E\in\Omega_i}B_i=B_i$。因此，$B$ 是一个两边理想。令 $A\neq 0$ 是一个两边理想且含于 B_i 内，则 A_R 是半单的。因此，存在一个单右理想 E 使 $E\hookrightarrow A_R\hookrightarrow B_i$。于是，$B_i=RE\hookrightarrow RA=A\hookrightarrow B_i$。所以，$A=B_i$，即 B_i 作为两边理想是单的。

(2) 对应地，$C_j(1,2,\cdots,n)$ 也是单的两边理想。由于 B_iC_j 是两边理想，它既含于 B_i 内又含于 C_j 内。又由于 B_i 与 C_j 均是单的，故有 $B_iC_j=0$ 或 $B_i=B_iC_j=C_j$。对固定的 $i_0=1$，2，…，m，至少存在一个 j_0 使得 $B_{i_0}=B_{i_0}C_{j_0}=C_{j_0}$。否则，就有 $B_{i_0}R=\sum\limits_j B_{i_0}C_j=0$，矛盾。若还存在这样的一个 j_1 使 $B_{i_0}=B_{i_0}C_{j_1}=C_{j_1}$，则有 $C_{j_0}=C_{j_1}$，矛盾。对应地，对每个 $j_0=1$，2，…，n，存在 i_0 使 $B_{i_0}=C_{j_0}$。所以结论成立。

(3) 由 $R=\bigoplus\limits_{i=1}^{m}B_i$，得 $RB_j=B_j=\bigoplus\limits_{i=1}^{m}B_iB_j$，从而得证。

(4) 由(3)，B_i 是双边 R－理想与 B_i 的双边 B_i－理想相吻合。因此，B_i 作为环是单的。令 $1=\sum f_i$，$f_i\in B_i$，则由引理 6.2.1 知，$B_i=f_iR$，f_i 是 R 的中心幂等元。对 $b=f_ir\in B_i$，有 $bf_i=f_ib=f_i^2r=f_ir=b$。因此 f_i 是 B_i 的单位元。

(5) 类似于(4)的证明。

定义 6.2.2 在定理 6.2.2 中出现的单的双边理想 $B_i(i=1,2,\cdots,m)$ 称为 R 的块。

推论 6.2.2 令 R 是半单环，则 R 的块的个数等于单右 R－模的同构类的个数，也

等于单左 R - 模的同构类的个数。

证明　每个单右 R - 模或单左 R - 模分别同构于 R 的右理想或左理想(这是因为 R_R 到循环 R - 模的每个满同态分裂)。因此，仅需考虑单右或左理想，而这由定理 6.2.2 即可得证。

6.3　稠密定理

在所有的考虑中，大部分是从右 R - 模讨论起，把 R - 同态写在 M 的元素的左边。令 $S=\mathrm{End}(M_R)$ 是 M_R 的自同态环，那么，M 可视为 $(S,\ R)$ - 双模。事实上，这个约定对许多情况是合适的，但并非全部的都合适，特别地不适合如下情形，那就是一开始提到过的阿贝尔群 M 和它的自同态环 $T=\mathrm{End}(M_{\mathbb{Z}})$。

为了证明上面使用过的约定能在下面运用和证明下列结果的正确性，必须做一说明，其中不需要进一步假设任何东西。

定义 6.3.1　令 R 和 R° 分别是具有乘法“ · ”和乘法“$\circ$”的环。R° 叫作 R 的反环 :⇔

(1) R 的加群与 R° 的加群相同；

(2) $\forall r$、$s\in R$，$r\cdot s=s\circ r$。

注：

(1) R 只存在一个反环 R°；

(2) $R^{\circ\circ}=R$；

(3) R 是交换的 $\Leftrightarrow R^{\circ}=R$。

证明：

R° 的存在性：定义 $(R^{\circ},\ +)=(R,\ +)$，且乘法为

$$s\circ r=r\cdot s,\ (r,\ s\in R),$$

则 R° 是 R 的反环。

R° 的唯一性：令 R^{*} 是 R 的具有乘法“ $*$ ”的反环，由定义，有

$$(R^{*},\ +)=(R,\ +)=(R^{\circ},\ +)。$$

进一步地有，$s*r=r\cdot s=s\circ r$，r，$s\in R$，故 $R^{*}=R^{\circ}$，显然可证注(2)、注(3)。

由定义，通过互换边旁，R 的所有性质可以过渡到 R° 上。

注： 令 $M=M_R$，定义 $r\circ m=mr$，对 $m\in M$，$r\in R^{\circ}$，则 M 构成左 R° - 模 ${}_{R^{\circ}}M$。而 M 的作为 M_R 的子模的子加群恰好也是 ${}_{R^{\circ}}M$ 的子模。

本题的证明留给读者。

由于已讲将明边的变换的意义，因此假定 $M = {}_RM$。进一步，令 $T = \mathrm{End}(M_{\mathbb{Z}})$（$M$ 的所有群的自同态环），则它里面的自同态也可应用在左边，使 $M = {}_TM$。对每个 $r \in R$，左乘法

$$r^{(l)}:\ \ni x \mapsto rx \in M$$

是 T 中元，映射

$$\psi:\ R \ni r \mapsto r^{(l)} \in T$$

可直接证得是环同态。

$R^{(l)} = \mathrm{Im}(\psi)$ 称为模 ${}_RM$ 的左乘环，$\mathrm{Ker}(\psi)$ 是 R 内的两边理想，由所有满足 $rM = 0$ 的 $r \in R$ 构成。

定义 6.3.2 模 M 叫作忠实的：$\Leftrightarrow \forall r \in R$，$rM = 0 \Rightarrow r = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(\psi) = 0$。当 R 是忠实的时，可把 R 与 $R^{(l)}$ 视为同一，从而 $R \hookrightarrow T$。

定义 6.3.3 令 T 是任意环，$A \subset T$（T 的子集）则

$$\mathrm{Cent}(A) = \{t \mid t \in T \wedge \forall,\ a \in A \quad (at = ta)\}$$

叫作 A 在 T 内的中心化子。

显而易见，$\mathrm{Cent}(A)$ 是 T 的具有单位元的子环，$\mathrm{Cent}(T)$ 是 T 的中心。

引理 6.3.1 令 $M = {}_RM$，$T = \mathrm{End}(M_Z)$，$S = \mathrm{End}({}_RM)$，则

(1) $S = R' = \mathrm{Cent}(R^{(l)})$。

(2) $R^{(l)} \subset R'' = \mathrm{Cent}(\mathrm{Cent}(R^{(l)}))$。

(3) $R' = R''' = \mathrm{Cent}(\mathrm{Cent}(\mathrm{Cent}(R^{(l)})))$。

证明：

(1) $S \hookrightarrow \mathrm{Cent}(R^{(l)})$：令 $\sigma \in s$。则对 $\forall r \in R$，$x \in M$：$\sigma(rx) = r\sigma(x)$，故 $\sigma r^{(l)} = r^{(l)}\sigma \Rightarrow \sigma \in \mathrm{Cent}(R^{(l)})$。令 $\tau \in \mathrm{Cent}(R^{(l)}) \Rightarrow \tau r^{(l)} = r^{(l)}\tau$，$\forall r \in R \Rightarrow \tau(rx) = r(\tau x) \Rightarrow \tau \in S$。

(2) 与 (3) 可由中心化子定义得到。

现在提出两个有趣的问题：在何种条件下，$R^{(l)} = R''$？在何种条件下，$R^{(l)} \neq R''$？而且，我们观察到 $R^{(l)}$ 和 R'' 是依赖于 $M = {}_RM$ 的。

例子：

1. 如果 $M = {}_RM \neq 0$ 是一个自由模，则 ${}_RM$ 是一个忠实的 R - 模，那么有 $R^{(l)} = R''$。

2. 令 ${}_RM = {}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$，则 $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{(l)}$，$S = \mathbb{Z}' = \mathbb{Z}'' \cong \mathbb{Q}$。

3. 设 $V = V_K$ 是域（或体）K 上无限维向量空间。令 R 是 $T = \mathrm{End}(V_K)$ 的由 V 的恒等映射和 V_K 的有限秩线性映射生成的子环。则有以下结论：

①$V = {}_RV$ 是单 R – 模。

②$R' = \mathrm{End}({}_RV) = K^{(r)}(\cong K)$。

③$R^{(l)} = R \neq R'' = \mathrm{End}(V_{R'})$。

④对于 V 中有限多个元素 r_1，r_2，…，r_t 和 $\sigma \in R''$，存在 $r \in R$，使 $\sigma_{r_i} = rr_i$ $(i = 1, 2, \cdots, t)$。

证明：

结论① $\forall 0 \neq x_1 \in V$，则可将 x_1 扩充成 V 的一组基 $\{x_i \mid i \in I\}$。$\forall y \in V$，令 $A^y(x_1) = y$，$A^y(x_i) = 0$ $(i \in I, i \neq 1)$。显然 $A^y \in R$，因此有 $Rx_1 = V$，从而 $V = {}_RV$ 是单 R – 模。

结论② $\forall \varphi \in R'$，设 $\{x_i \mid i \in I\}$ 是 V_K 的一组基，则 $x_i\varphi = \sum_{k=0}^{n} x_k a_{ik}$（$n$ 是有限数，a_{ik} 可以是0）。令 $A \in R$，A：$\begin{cases} x_i \to x_j, & k = i \\ x_k \to 0, & k \neq i \end{cases}$，则由于 $\varphi A = A\varphi$，有 $(Ax_i)\varphi = A((x_i)\varphi)$。注意，由于 ${}_RV$ 是左 R – 模，故模同态 φ 写在 x_i 的左边。从而 $(x_j)\varphi = x_j a_{ii}$，于是 $\forall x_i \in \{x_i \mid i \in I\}$，则有 $x_i\varphi = x_i a_i$。故 $(Ax_i)\varphi = A(x_i\varphi) \Rightarrow x_j a_j = x_j a_i \Rightarrow a_i = a_j$，即存在 a 使 $x_i\varphi = x_i a$。

下面证明：$\forall x \in V$，均有 $x\varphi = xa$。

若 $x = 0$，则显然有 $0\varphi = 0 = 0a$。

若 $x \neq 0$，则 x 可扩充为一组基 $\{x\} \cup \{y_j \mid j \in J\}$。若 $x \in \{x_i \mid i \in I\}$，则显然有 $x\varphi = xa$。若 $x \notin \{x_i \mid i \in I\}$，则 $\exists x_j$ 使 x 与 x_j 线性无关。不妨设 x_1 与 x 线性无关。显然对 $z \in \{x\} \cap \{y_j \mid j \in J\}$，$\exists b$ 使 $z\varphi = zb$。

于是，令 A：$\begin{cases} x \mapsto x_1 \\ y_j \mapsto 0 \end{cases}$，$j \in J$，则 $A(x\varphi) = (Ax)\varphi \Rightarrow bx_1 = ax_1 \Rightarrow a = b$。所以 $x\varphi = xa$，$\forall x \in V \Rightarrow \varphi \in K^{(r)} \Rightarrow R' = \mathrm{End}({}_RV) \subset K^{(r)}$。显然有 $K^{(r)} \subset \mathrm{End}({}_RV)$，所以就有 $\mathrm{End}({}_RV) = K^{(r)}$。

结论③因为 $R' = K^{(r)} \cong K$，故 $R'' = \mathrm{End}(V_{R'})$ 是线性空间 $V_{R'}$ 上的所有线性变换。因此 $R'' \neq R = R^{(l)}$。

结论④是下面定理6.3.1的特殊情形。

定义 6.3.4 令 R 和 S 是环，${}_RM$ 和 ${}_SM$ 是具有同一加群的模，${}_RM$ 叫作在 ${}_SM$ 内稠密的:⇔对任意有限多个元素 x_1，x_2，…，$x_t \in M$ 和 $s \in S$ 存在 $r \in R$ 使得 $sx_i = rx_i$，这里的 $i = 1, 2, \cdots, t$。

定理 6.3.1（稠密性定理） 每个半单模 ${}_RM$ 在 ${}_{R''}M$ 内稠密。

证明 分三步进行证明。

第一步，首先令 $N={}_RN$ 是任意模，U 是它的直和项，因此 $N=U\oplus N_1$。今令 $R''=R''_N$ 是 R 关于 N 的双重中心化子。因而断言 $R''U=U$，i. e. U 是${}_RU$ 的 R''－子模。令 π 是 N 到 U 的投影映射，η 是 U 到 N 内的包含映射，则有 $\eta\pi\in R'=\mathrm{Hom}_R(N,N)$，$\mathrm{Im}(\eta\pi)=U$。对于 $r''\in R''$，$u\in U$，得到

$$r''u=r''\eta\pi(u)=\eta\pi r''(u)=\eta\pi(r''u)\in U。$$

从而 $R''U=U$。

今令 N 是半单的，$x\in N$，则 R_x 是 N 的直和项。取 $U=Rx$，则有 $Rx=R'Rx$。由引理6.3.1(2)知，$R''Rx=R''x$。于是就有 $Rx=R''x$。因此，对每个 $x\in N$ 与 $r''\in R''$，存在 $r_0\in R$使得 $r_0x=r''x$。

第二步，令 $M={}_RM$ 是半单的，$N=\coprod_{i=1}^{n}M_i$，这里 $M_i=M$，$i=1,2,\cdots,n$，则有

$$N=\coprod_{i=1}^{n}M_i=\bigoplus_{i=1}^{n}M_i',$$

式中，$M_i'\cong M_i\cong M$。

因此 N 是半单模 M_i'的直和，所以本身也是半单的。今记 R 关于 M 和 N 的双重中心化子分别为 R''_M和 R''_N。

断言：对 $r''\in R''_M$和$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in N$，定义

$$\widehat{r''}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(r''x_1,r''x_2,\cdots,r''x_n),$$

则 N 构成 R''_M-模。映射$\widehat{r''}$：$N\ni(x_1,\cdots,x_n)\mapsto(r''x_1,\cdots,r''x_n)\in N$ 是 R''_N中的元素。$R''_M\ni r''\mapsto\widehat{r''}\in R''_N$ 是一个环单同态，模的性质是显然的。剩下要证明的是$\widehat{r''}\in R''_N$。令

$$\pi_i:N\to M_i,\ \eta_i:M_i\to N$$

分别是投射映射和包含映射，则有：

$$r''\pi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=r''x_i=\pi_i\widehat{r''}(x_1,x_2,\cdots,x_n)。$$

$$\widehat{r''}\eta_ix_i=\widehat{r''}(0,\cdots,0,x_i,0,\cdots,0)=\eta_ir''x_i$$

亦即：$r''\pi_i=\pi_i\widehat{r''}$，$\widehat{r''}\eta_i=\eta_i\widehat{r''}$。由于 $\sum_{i=1}^{n}\eta_jx_i=1_N$，对于 $\forall\varphi\in\mathrm{Hom}_R(N,N)$，有

$$\varphi=1_N\varphi1_N=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\eta_i\pi_i\varphi\eta_j\pi_j。$$

由于 $M_i=M$，故 $\pi_i\varphi\pi_j\in\mathrm{Hom}_R(M,M)$。

因此，

$$\begin{aligned}\widehat{r''}\varphi&=\widehat{r''}\sum_i\sum_j\eta_i\pi_i\varphi\eta_j\pi_j=\sum_i\sum_j\eta_ir''(\pi_i\varphi\eta_j)\pi_j\\&=\sum_i\sum_j\eta_i(\pi_i\varphi\eta_j)r''\pi_j=(\sum_i\sum_j\eta_i\pi_i\varphi\eta_j\pi_j)\widehat{r''}\end{aligned}$$

$$=\varphi \widehat{r''}。$$

此为所欲证者。

第三步，今令 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in N$，$r'' \in R''_M$，将第一步应用到 $N=\coprod_{i=1}^{n} M_i$，其中 $M_i = M(i=1, 2, \cdots, n)$，则对 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in N$ 和$\widehat{r''} \in R_N''(\widehat{r''})$（$\widehat{r''}$在第二步的意义下对应 r''），存在 $r_0 \in R$ 使得

$$r_0 x = (r_0 x_1, \cdots, r_0 x_n) = \widehat{r''} x = (r'' x_1, \cdots, r'' x_n)。$$

因此，有

$$r_0 x_i = r'' x_i,\ i=1, 2, \cdots, n。$$

推论 6.3.1 令${}_RM$ 是单的，且 M 在体 $K=\mathrm{End}({}_RM)$上是有限维的，则 $R^{(l)}=R''$。

证明：

令 $x_1, \cdots, x_n$ 是${}_KM$ 的一组基，则对于每个 $\sigma \in R''$，存在 $r \in R$ 使得 $\sigma x_i = r x_i$（$i=1, 2, \cdots, n$）。由于 σ 和 $r^{(l)}$ 是线性映射，因此，$\sigma = r^{(l)}$。所以 $R'' \hookrightarrow R^{(l)}$。另一方面，$R^{(l)} \hookrightarrow R''$，故 $R^{(l)}=R''$。

推论 6.3.2 令${}_RM$ 是单的，${}_RR$ 是阿廷的，则 M 在 $K=\mathrm{End}({}_RM)$上是有限维的，并且 $R^{(l)}=R''$。

证明：

由推论 6.3.1，仅证${}_RM$ 是有限维的。假如不是这样，则${}_KM$ 内存在一可数无限集线性无关元素：$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$。令 $A_n = \{a \mid a \in R \wedge a x_1 = \cdots = a x_n = 0\}$，则 A_n 是 R 内的左理想。由于存在 $a_n \in A$ 使得 $a_n x_{n+1} \neq 0$（定理 6.3.1），故成立 $A_n \hookleftarrow\!\!\!\!\!\neq A_{n+1}$。于是得到左理想无限链：

$$A_1 \underset{\neq}{\hookleftarrow} A_2 \underset{\neq}{\hookleftarrow} A_3 \underset{\neq}{\hookleftarrow} \cdots,$$

此与${}_RR$ 是阿廷的矛盾。

习题 6.3

1. 对模 M_R 证明：

（1）M 是半单的 $\Leftrightarrow$ M 没有大的真子模。

（2）令 M 是有限生成的，则 M 是半单的 $\Leftrightarrow$ M 没有大的极大子模。

（3）构造一个不具有大的极大子模的非半单模。

第 7 章　根基与基座

7.1　根基与基座

定理 7.1.1　令 $M=M_R$ 是一个 R - 模，则有

(1) $\sum\limits_{A\overset{\circ}{\hookrightarrow}M} A=\bigcap\limits_{\substack{B\hookrightarrow M\\ B\text{是极大的}}} B=\bigcap\limits_{\substack{N_R\text{半单}\\ \varphi\in \mathrm{Hom}_R(M,N)}} \mathrm{Ker}(\varphi)$。

(2) $\bigcap\limits_{A\overset{\bullet}{\hookrightarrow}M} A=\sum\limits_{\substack{B\hookrightarrow M\\ B\text{是极小的}}} B=\sum\limits_{\substack{N_R\text{半单}\\ \varphi\in \mathrm{Hom}_R(N,M)}} \mathrm{Im}(\varphi)$。

证明：

(1)依次将要证明相等的 M 的三个子模记为 U_1，U_2，U_3。

"$U_2\hookrightarrow U_1$"：令 $a\in U_2$，假设 aR 不是 M 的小子模，由引理 3.1.2，存在 M 的极大子模 C 使得 $a\notin C$。因此 $a\notin U_2$，矛盾。所以，$aR\overset{\circ}{\hookrightarrow}M$，从而 $a\in aR\hookrightarrow U_1$。

"$U_3\hookrightarrow U_2$"：令 B 是 M 内的极大子模，v_B：$M\rightarrow M/B$ 是自然满同态，则 $\mathrm{Ker}(v_B)=B$。于是

$$U_3\subset\bigcap\limits_{\substack{B\hookrightarrow M\\ B\text{极大}}}\mathrm{Ker}(v_B)=\bigcap\limits_{\substack{B\hookrightarrow M\\ B\text{极大}}}B=U_2。$$

"$U_1\hookrightarrow U_3$"：由引理 3.1.1(3)，有 $A\overset{\circ}{\hookrightarrow}M\Rightarrow\varphi(A)\overset{\circ}{\hookrightarrow}N$，$\forall\varphi$：$M\rightarrow N$。如果 N 是半单的，则 0 是唯一的小子模。因此，$\varphi(A)=0$，亦即 $A\hookrightarrow\mathrm{Ker}(\varphi)$，所以 $U_1\hookrightarrow U_3$。

(2)仍依次记子模为 U_1，U_2，U_3。

"$U_2\hookrightarrow U_1$"：如果 B 是 M 的单子模，$A\overset{\bullet}{\hookrightarrow}M$，则 $A\cap B\neq 0$。所以，$A\cap B=B$，从而 $B\hookrightarrow A$。因此，$U_2\hookrightarrow U_1$。

"$U_3\hookrightarrow U_2$"：因为半单模的同态像仍是半单的，同样地，半单模的和也是半单的，所以 U_3 是 M 的半单子模，从而 U_3 是 M 的单子模的和。由于 U_2 是 M 的所有单子模的和，故有 $U_3\hookrightarrow U_2$。

"$U_1\hookrightarrow U_3$"：可以断言 U_1 是半单的。令 $C\hookrightarrow U_1$，C'是 C 在 M 内的交补，则有 $C+$

$C' = C \oplus C' \hookrightarrow rM$。因此，$U_1 \hookrightarrow C + C'$。由模律（注意 $C \hookrightarrow U_1$），则有 $U_1 = C \oplus (C' \cap U_1)$。于是，$U_1$ 是半单的。令 $l: U_1 \to M$ 是包含映射，则有 $U_1 = \mathrm{Im}(l) \hookrightarrow U_3$。

定义 7.1.1

(1) 定理 7.1.1(1) 定义的子模叫作 M 的根基（简称根），记为 $\mathrm{Rad}(M)$。

(2) 定理 7.1.1(2) 定义的子模叫作 M 的基座，记为 $\mathrm{Soc}(M)$。

推论 7.1.1

(1) 对 $m \in M_R$，有：$mR \overset{\circ}{\hookrightarrow} M \Leftrightarrow m \in \mathrm{Rad}(M)$。

(2) $\mathrm{Soc}(M)$ 是 M 的最大半单子模。

请读者自己证明这个推论。

定理 7.1.2

(1) $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, N) \Rightarrow \varphi(\mathrm{rad}(M)) \hookrightarrow \mathrm{Rad}(N) \wedge \varphi \mathrm{Soc}(M) \hookrightarrow \mathrm{Soc}(N)$。

(2) $\mathrm{Rad}(M/\mathrm{Rad}(M)) = 0 \wedge \forall C \hookrightarrow M,\ \mathrm{Rad}(M/C) = 0 \Rightarrow \mathrm{Rad}(M) \hookrightarrow C$, i. e. $\mathrm{Rad}(M)$ 是使得 $\mathrm{Rad}(M/C) = 0$ 的最小子模。

(3) $\mathrm{Soc}(\mathrm{Soc}(M)) = \mathrm{Soc}(M) \wedge \forall C \hookrightarrow M,\ \mathrm{Soc}(C) = C \Rightarrow C \hookrightarrow \mathrm{Soc}(M)$, i. e. $\mathrm{Soc}(M)$ 是 M 的自身与其基座相吻合的最大子模。

证明：

(1) 由 $\mathrm{Rad}(M) = \sum_{A \overset{\circ}{\hookrightarrow} M} A$ 得 $\varphi(\mathrm{Rad}(M)) = \sum_{A \overset{\circ}{\hookrightarrow} M} \varphi(A)$。由引理 3.1.1 知，$\varphi(A) \overset{\circ}{\hookrightarrow} N$。因此，$\varphi(\mathrm{Rad}(M)) \hookrightarrow \mathrm{Rad}(N)$。由于半单模的同态像仍是半单的，故 $\varphi(\mathrm{Soc}(M)) \hookrightarrow \mathrm{Soc}(N)$。

(2) 断言：M/C 的极大子模 Δ 是作为 M 的极大子模 $B \hookrightarrow M$ 在 $v: M \to M/C$ 下的像而得到的。

证明可参见引理 1.5.5，或者直接证明如下：$vv^{-1}(\Delta) = \Delta \cap \mathrm{Im}(v) = \Delta$。令 $B = v^{-1}(\Delta) \wedge C \hookrightarrow B \hookrightarrow M$，由于 Δ 是极大的，$(M/C)/\Delta = (M/C)/(B/C) \cong M/B$，因此 B 是 M 的极大子模。

断言：如果 $(B_i \mid i \in I)$ 是 M 的子模族，并且，$\forall i \in I,\ C \hookrightarrow B_i$，则有

$$\bigcap_{i \in I} (B_i/C) = (\bigcap_{i \in I} B_i)/C\,。$$

显然，$(\cap B_i)/C \hookrightarrow \cap (B_i/C)$。今令 $u + C \in \cap (B_i/C)$，则对每个 i，存在 $b_i \in B_i$，使得 $u + C = b_i + C$，有 $u = B_i + c_i \in b_i + C = B_i\ (\forall i \in I)$，所以 $u + C \in (\cap B_i)/C$。

现在应用这些结论来证明上面的结果。

$$\begin{aligned}\mathrm{Rad}(M/\mathrm{Rad}(M)) &= \bigcap_{\Delta \text{在} M/\mathrm{Rad}(M) \text{内极大}} \Delta \\ &= \bigcap_{\substack{\text{极大} B \hookrightarrow M \\ \mathrm{Rad}(M) \hookrightarrow B}} (B/\mathrm{Rad}(M))\end{aligned}$$

$$= (\bigcap_{\substack{\text{极大}B\hookrightarrow M \\ \mathrm{Rad}(M)\hookrightarrow B}} B)/\mathrm{Rad}(M)$$
$$= (\bigcap_{\text{极大}B\hookrightarrow M} B)/\mathrm{Rad}(M)$$
$$= \mathrm{Rad}(M)/\mathrm{Rad}(M)$$
$$= 0。$$

今令 $C \hookrightarrow M \wedge \mathrm{Rad}(M/C) = 0$，则对映射 $v: M \to M/C$，由(1)，$v(\mathrm{Rad}(M)) \hookrightarrow \mathrm{Rad}(M/C) = 0$。所以 $\mathrm{Rad}(M) \hookrightarrow \mathrm{Ker}(v) = C$。

(3)因为 $\mathrm{Soc}(M)$ 是 M 的最大半单模，故单模与它的基座相吻合。因此，$\mathrm{Soc}(\mathrm{Soc}(M)) = \mathrm{Soc}(M)$。令 $\mathrm{Soc}(M) = C$，则 C 是半单的。于是有 $C \hookrightarrow \mathrm{Soc}(M)$。

推论 7.1.2

(1)满同态 $\varphi: M \to N \wedge \mathrm{Ker}(\varphi) \overset{\cdot}{\hookrightarrow} M \Rightarrow \varphi(\mathrm{Rad}(M)) = \mathrm{Rad}(N) \wedge \mathrm{Rad}(M) = \varphi^{-1}(\mathrm{Rad}(N))$。

单同态 $\varphi: M \to N \wedge \mathrm{Im}(\varphi) \overset{\cdot}{\hookrightarrow} N \Rightarrow \varphi(\mathrm{Soc}(M)) = \mathrm{Soc}(N) \wedge \mathrm{Soc}(M) = \varphi^{-1}(\mathrm{Soc}(N))$。

(2)$C \hookrightarrow M \Rightarrow \mathrm{Rad}(C) \hookrightarrow \mathrm{Rad}(M) \wedge \mathrm{Soc}(C) \hookrightarrow \mathrm{Soc}(M)$。

(3)$M = \bigoplus_{i \in I} M_i \Rightarrow \mathrm{Rad}(M) = \bigoplus_{i \in I} \mathrm{Rad}(M_i) \wedge \mathrm{Soc}(M) = \bigoplus_{i \in I} \mathrm{Soc}(M_i)$。

(4)$M = \bigoplus_{i \in I} M_i \Rightarrow M/\mathrm{Rad}(M) \cong \bigoplus[M_i/\mathrm{Rad}(M_i)]$。

证明：

(1)由定理 7.1.2 知 $\varphi(\mathrm{Rad}(M)) \hookrightarrow \mathrm{Rad}(N)$。今设 $U \overset{\cdot}{\hookrightarrow} N$。对 $A \hookrightarrow M$，令 $A + \varphi^{-1}(U) = M$。

由于 φ 是满同态，故 $\varphi(A) + U = N$。于是，$\varphi(A) = N$。所以 $A + \mathrm{Ker}(\varphi) = M$。由于 $\mathrm{Ker}(\varphi) \overset{\cdot}{\hookrightarrow} M$，故得 $A = M$。亦即 $\varphi^{-1}(U) \overset{\cdot}{\hookrightarrow} M \Rightarrow \varphi^{-1}(U) \hookrightarrow \mathrm{Rad}(M) \Rightarrow \varphi(\varphi^{-1}(U)) = U \hookrightarrow \varphi(\mathrm{Rad}(M))$。因此，$\mathrm{Rad}(N) \hookrightarrow \varphi(\mathrm{Rad}(M))$。此即为所欲证者。

由 $\varphi(\mathrm{Rad}(M)) = \mathrm{Rad}(N)$ 及 $\mathrm{Ker}(\varphi) \hookrightarrow \mathrm{Rad}(M)$ 得 $\mathrm{Rad}(M) = \mathrm{Rad}(M) + \mathrm{Ker}(\varphi) = \varphi^{-1}\varphi(\mathrm{Rad}(M)) = \varphi^{-1}(\mathrm{Rad}(N))$。另一方面，由定理 7.1.2，对于基座，有 $\varphi(\mathrm{Soc}(M)) \hookrightarrow \mathrm{Soc}(N)$。今令 $E \overset{\cdot}{\hookrightarrow} N$ 是单的，则由于 $\mathrm{Im}(\varphi) \hookrightarrow N$，有 $E \hookrightarrow \mathrm{Im}(\varphi) \Rightarrow \varphi^{-1}(E) \hookrightarrow \mathrm{Soc}(M) \Rightarrow \varphi\varphi^{-1}(E) = E \hookrightarrow \varphi(\mathrm{Soc}(M)) \Rightarrow \mathrm{Soc}(N) \hookrightarrow \varphi(\mathrm{Soc}(M))$。由 $\varphi(\mathrm{Soc}(M)) = \mathrm{Soc}(N)$ 可得

$$\mathrm{Soc}(M) = \varphi^{-1}\varphi(\mathrm{Soc}(M)) = \varphi^{-1}(\mathrm{Soc}(N))。$$

(2)令 $l: C \to M$ 是包含映射，则由定理 7.1.2 得

$$\mathrm{Rad}(C) = l(\mathrm{Rad}(C)) \hookrightarrow \mathrm{Rad}(M),$$
$$\mathrm{Soc}(C) = l(\mathrm{Soc}(C)) \hookrightarrow \mathrm{Soc}(M)。$$

(3)由(2)，$\mathrm{Rad}(M_i) \hookrightarrow \mathrm{Rad}(M)$，因此，

$$\sum_{i \in I} \mathrm{Rad}(M_i) = \bigoplus_{i \in I} \mathrm{Rad}(M_i) \hookrightarrow \mathrm{Rad}(M)。$$

令 $m=\sum m_i\in \mathrm{Rad}(M)$，$\pi_i$：$M\to M_i$ 是第 i 个投影映射，则由定理 7.1.2 知 $\pi_i(m)=m_i\in \mathrm{Rad}(M_i)$。所以，$m\in\bigoplus \mathrm{Rad}(M_i)$。因此，$\mathrm{Rad}(M)\hookrightarrow\bigoplus \mathrm{Rad}(M_i)$，从而结论得证。对于基座可类似地证明。

(4)我们首先作一个映射 φ 如下：

$$\varphi:\ M/\mathrm{Rad}(M)\to\bigoplus_{i\in I}(M_i/\mathrm{Rad}(M_i))。$$

令 $\sum m_i\in\bigoplus M_i(m_i\in M_i)$是 M 中的任一个元素，则令

$$\varphi((\sum m_i)+\mathrm{Rad}(M_i))=\sum[m_i+\mathrm{Rad}(M_i)]\in\bigoplus_{i\in I}[M_i/\mathrm{Rad}(M_i)]。$$

"φ 是定义良好的映射"：令 $(\sum m_i)+\mathrm{Rad}(M)=(\sum m_i')+\mathrm{Rad}(M)$，$m_i$，$m_i'\in M_i$，则 $\sum(m_i-m'_i)\in \mathrm{Rad}(M)$。因此，由(3)，$m_i-m_i'\in\mathrm{Rad}(M_i)$，所以有 $m_i+\mathrm{Rad}(M_i)=m_i'+\mathrm{Rad}(M_i)$，从而 $\sum(m_i+\mathrm{Rad}(M_i))=\sum(m'_i+\mathrm{Rad}(M_i))$。易证 φ 是模同态。

"φ 是单同态"：令 $\varphi((\sum m_i)+\mathrm{Rad}(M))=\sum[m_i+\mathrm{Rad}(M_i)]=0$，则 $m_i\in \mathrm{Rad}(M_i)$，$(\forall m_i)$。由于 $\mathrm{Rad}(M_i)\hookrightarrow \mathrm{Rad}(M)$，所以有 $(\sum m_i)+\mathrm{Rad}(M)=\mathrm{Rad}(M)$，故 $\mathrm{Ker}(\varphi)=0$。即 φ 为单同态。显然，φ 是满同态，从而 φ 是模同构。

例子如下：

1. $\mathrm{Rad}(\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}})=0$，$\mathrm{Soc}(\mathbb{Z}_{\mathbb{Z}})=0$。

2. $\mathrm{Rad}(\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}})=\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$，这是因为 $\forall q\in Q$，$q\mathbb{Z}\hookrightarrow Q$(见 3.1 节)，这也等价于$\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$没有极大子模。

3. 令 $n\in\mathbb{Z}$，$n>1$，则 n 有如下素数幂的唯一分解：

$$n=p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots p_k^{m_k},\ p_i\neq p_j,\ 对\ i\neq j,\ m_i>0。$$

$\mathbb{Z}$ 的极大理想是由素数生成的素理想，从而 $p_i\mathbb{Z}$ 是含有 $n\mathbb{Z}$ 的极大理想($i=1,2,\cdots,k$)，于是，有

$$\bigcap_{i=1}^{k}p_i\mathbb{Z}=p_1p_2\cdots p_k\mathbb{Z}。$$

因此有

$$\mathrm{Rad}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})=(\bigcap_{i=1}^{k}p_i\mathbb{Z})/n\mathbb{Z}=p_1\cdots p_k\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}。$$

所以有

$$\mathrm{Rad}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})=0\Leftrightarrow n=p_1\cdots p_k。$$

同样地，当 $n=0$ 与 $n=1$ 时，$\mathrm{Rad}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})=0$。

下面确定 $\mathrm{Soc}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$，显然 $n=0$，1 时，$\mathrm{Soc}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})=0$。

首先有：$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 是单$\mathbb{Z}$-模 $\Leftrightarrow$ n 是素数。亦即，如果 $n=p$ 是素数，则$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$（作为

环)是域。因此作为$\mathbb{Z}$-模它是单的。如果n至少有一个真因子q，则$q\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$是$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$的非零真子模。由于

$$\frac{n}{p_i}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}/p_i\mathbb{Z}\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)。$$

利用$A+B/B\cong A/A\cap B$可知，模$\frac{n}{p_i}\mathbb{Z}$是$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$的单子模。因此

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{n}{p_i}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{n}{p_i}\mathbb{Z}\right)/n\mathbb{Z}=\frac{1}{p_1\cdots p_k}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\hookrightarrow \mathrm{Soc}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})。$$

另一方面，令$q\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$(其中$n=qn_1$)是$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$的单子模。由于

$$q\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z},$$

n_1必定是素数$p_1\cdots p_k$中的某一个，比如说p_i，因此$q=\frac{n}{p_i}$。于是，$\mathrm{Soc}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})=\frac{1}{p_1\cdots p_k}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$。

特别地推导出下列一些特殊情形：

$$\mathrm{Rad}(\mathbb{Z}/p_1\cdots p_k\mathbb{Z})=0,\ \mathrm{Soc}(\mathbb{Z}/p_1\cdots p_k\mathbb{Z})=\mathbb{Z}/p_1\cdots p_k\mathbb{Z},$$

$$\mathrm{Rad}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})=p\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}/p^{n-1}\mathbb{Z},$$

$$\mathrm{Soc}(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})=p^{n-1}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}。$$

习题 7.1

1. 证明对一个环R，下列叙述是等价的：

(1)对每个右R-模M，有$\mathrm{Rad}(M)\stackrel{\ast}{\hookrightarrow}M$。

(2)不存在右R-模$M\neq0$，使$\mathrm{Rad}(M)=M$。

2. 证明对一个环，下列条件是等价的：

(1)对每个右R-模M，有$\mathrm{Soc}(M)\stackrel{\ast}{\hookrightarrow}M$。

(2)对每个循环右R-模M，使$\mathrm{Soc}(M)\stackrel{\ast}{\hookrightarrow}M$。

(3)不存在右R-模$M\neq0$，使$\mathrm{Soc}(M)=0$。

3. 令$\mathrm{Soc}(M)\hookrightarrow B_R\hookrightarrow M_R\wedge a\in M\wedge a\notin B$，

(1)证明：存在$C\stackrel{\ast}{\hookrightarrow}M$，使$B\hookrightarrow C\wedge a\notin C$。

(2)证明：$\mathrm{Soc}(M)\hookrightarrow B_R\hookrightarrow M_R\Rightarrow B=\bigcap_{B\hookrightarrow C\stackrel{\ast}{\hookrightarrow}M}C$。

(3)证明：$\mathrm{Soc}(M)\hookrightarrow A\hookrightarrow M,\ \wedge\mathrm{Soc}(M/A)\stackrel{\ast}{\hookrightarrow}M/A\Rightarrow A\stackrel{\ast}{\hookrightarrow}M$。

4. 对下面给出的环R，确定$\mathrm{Rad}(R)$、$\mathrm{Soc}({}_RR)$与$\mathrm{Soc}(R_R)$。验证是否成立$\mathrm{Soc}(R_R)=\mathrm{Soc}({}_RR)$。

$$R=\left\{\begin{pmatrix} q & r \\ 0 & s \end{pmatrix} \middle| \ q\in\mathbb{Q},\ \wedge r、s\in\mathbb{R}\right\}。$$

$$R=\left\{\begin{pmatrix} z & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \ z\in\mathbb{Z},\ \wedge a、b\in\mathbb{Q}\right\}。$$

其中，$\mathbb{Z}$ 是整数环，$\mathbb{Q}$ 是有理数域，$\mathbb{R}$ 为实数域。

7.2　根基的进一步讨论

定理 7.2.1　令 $M=M_R$，则有

(1) M 是半单的 $\Rightarrow \mathrm{Rad}(M)=0$。

(2) $M\,\mathrm{Rad}(R_R)\hookrightarrow \mathrm{Rad}(M)$。

(3) M 是有限生成的 $\Rightarrow \mathrm{Rad}(M)\overset{\circ}{\hookrightarrow} M$，特别地，$\mathrm{Rad}(R_R)\overset{\circ}{\hookrightarrow} R_R$。

(4) M 是有限生成的，并且 $A\hookrightarrow \mathrm{Rad}(R_R)\Leftrightarrow A\overset{\circ}{\hookrightarrow} R_R \Rightarrow MA\overset{\circ}{\hookrightarrow} A$。（中山引理）

(5) M 是有限生成的，并且 $M\neq 0\Rightarrow \mathrm{Rad}(M)\neq M$。

(6) $\mathrm{Rad}(R_R)$ 是 R 的两边理想。

(7) 对每个投射模 P_R，有 $\mathrm{Rad}(P)=P\mathrm{Rad}(R_R)$。

(8) $C\hookrightarrow M\Rightarrow [C+\mathrm{Rad}(M)]/C\hookrightarrow \mathrm{Rad}(M/C)$。

证明：

(1) M 是半单的 $\Rightarrow$ 每个子模是直和项 $\Rightarrow 0$ 是唯一的小子模。于是，$\mathrm{Rad}(M)=0$。

(2) 令 $m\in M$，则 φ_m：$R_R\ni r\mapsto mr\in M_R$ 是一个同态。由定理 7.1.2，有

$$m\mathrm{Rad}(R_R)=\varphi_m(\mathrm{Rad}(R_R))\hookrightarrow \mathrm{Rad}(M)。$$

$$\Rightarrow \sum_{m\in M} m\mathrm{Rad}(R_R)=M\mathrm{Rad}(R_R)\hookrightarrow \mathrm{Rad}(M)。$$

(3) 令 $\mathrm{Rad}(M)+C=M$。假设 $C\neq M$，那么由于 M 是有限生成的，C 含在 M 的极大子模 B 内（定理 1.2.1）。因此，$M=\mathrm{Rad}(M)+C\hookrightarrow B$，从而有 $C=M$。于是，有

$$\mathrm{Rad}(M)\overset{\circ}{\hookrightarrow} M。$$

(4) $MA\hookrightarrow M\mathrm{Rad}(R_R)\hookrightarrow \mathrm{Rad}(M)\overset{\circ}{\hookrightarrow} M\Rightarrow MA\overset{\circ}{\hookrightarrow} M$。

(5) 因为 $M\neq 0\wedge \mathrm{Rad}(M)\overset{\circ}{\hookrightarrow} M$，有 $\mathrm{Rad}(M)\neq M$。否则，若 $\mathrm{Rad}(M)=M\Rightarrow \mathrm{Rad}(M)+0=M$，从而 $0=M$，矛盾。

(6) 令 $M_R=R_R$，由 (2) 可得证。

(7) 由 3.3 节的对偶基引理，设 $(y_i,\ \varphi_i)$ 是投射基，对 $u\in\mathrm{Rad}(P)$，则有 $\varphi_i(u)\in$

$\mathrm{Rad}(R_R)$（定理 7.1.2）。故有

$$u = \sum y_i \varphi_i(u) \in P\mathrm{Rad}(R_R)。$$

所以，$\mathrm{Rad}(P) \hookrightarrow P\mathrm{Rad}(R_R)$。由(2)，其逆包含也成立。故结论得证。

(8) 令 v: $M \to M/C$ 是自然满同态，则有

$$[C + \mathrm{Rad}(M)]/C = v(\mathrm{Rad}(M)) \hookrightarrow \mathrm{Rad}(M/C)。$$

现在希望证明：如果 M 是阿廷的，则 $M/\mathrm{Rad}(M)$ 是半单的。而且能从下面更一般的定理推出结果。

定理 7.2.2

(1) M 的每个子模在 M 内有加补 $\wedge\ \mathrm{Rad}(M) = 0 \Leftrightarrow M$ 是半单的。

(2) M 是阿廷的 $\wedge\ \mathrm{Rad}(M) = 0 \Leftrightarrow M$ 是半单的，并且 M 是有限生成的。

证明：

(1)"$\Rightarrow$"：令 $C \hookrightarrow M \wedge C'$ 是 C 在 M 内的加补，则 $M = C + C' \wedge C \cap C' \hookrightarrow \mathrm{Rad}(M) = 0$。因此，$M = C \oplus C' \Rightarrow M$ 是半单的。

"$\Leftarrow$"：显然将证。

(2)"$\Rightarrow$"：M 是阿廷的 $\Rightarrow$ 每个子模有加补。由(1)知 M 是半单的。由于 M 是半单的和阿廷的，由 6.1 节知，M 是有限生成的。

"$\Leftarrow$"：由 M 是半单和有限生成的知，M 是阿廷的(6.1 节)，故 $\mathrm{Rad}(M) = 0$ 是显然的。

推论 7.2.1 M 是阿廷的 $\Rightarrow M/\mathrm{Rad}(M)$ 是半单的。特别地，R_R 是阿廷的 $\Rightarrow R/\mathrm{Rad}(R_R)$ 半单。

证明留给读者作为练习。

习题 7.2

1. 证明推论 7.2.1。
2. 证明：对模 M_R 下列是等价的：

(1) M 是有限余生成的 $\wedge\ \mathrm{Rad}(M) = 0$；

(2) M 是有限生成的 $\wedge\ M$ 是半单的。

7.3 环的根基

这节的主要结果是等式：$\mathrm{Rad}(R_R)=\mathrm{Rad}({}_RR)$。

引理 7.3.1 下列条件对 R_R 的子模 $A\hookrightarrow R_R$ 是等价的：

(1) $A\overset{\circ}{\hookrightarrow} R_R$；

(2) $A\hookrightarrow \mathrm{Rad}(R_R)$；

(3) $\forall a\in A$，$1-a$ 在 R 内有右逆；

(4) $\forall a\in A$，$1-a$ 在 R 内有逆。

证明：

“(1) $\Rightarrow$ (2)”：由根基的定义可得。

“(2) $\Rightarrow$ (1)”：由定理 7.2.1(3)，$\mathrm{Rad}(R_R)\overset{\circ}{\hookrightarrow} R_R$，因此 $A\overset{\circ}{\hookrightarrow} R_R$。

“(1) $\Rightarrow$ (3)”：$\forall a\in A$ 及 $\forall r\in R$，有 $ar+(1-a)r=r\Rightarrow A+(1-a)R=R\Rightarrow(1-a)R=R$（因为 $A\overset{\circ}{\hookrightarrow} R_R$）$\Rightarrow$ (3)。

“(3) $\Rightarrow$ (4)”：设 $\exists r\in R$ 使 $(1-a)r=1$，则 $r=1+ar=1-(-ar)$，由于 $-ar\in A$，故存在 $s\in R$ 使得 $rs=[1-(-as)]s=1$。因此，r 有 $1-a$ 作为左逆元，s 作为右逆元，从而二者相吻合。于是有 $1=rs=r(1-a)$，i. e. r 是 $1-a$ 的逆。

“(4) $\Rightarrow$ (1)”：设 $\exists B\hookrightarrow R_R$ 使 $A+B=R_R$，则 $1=a+b$，$a\in A$，$b\in B$，i. e. $b=1-a$。从而存在 r 使 $br=(1-a)r=1$。故 $B=R$，i. e. $A\overset{\circ}{\hookrightarrow} R_R$。

注：

(1) 在文献中，具有性质(3)的右理想也称为是拟正则的。

(2) 显然这个定理对于左边也成立。

定理 7.3.1 $\mathrm{Rad}(R_R)=\mathrm{Rad}({}_RR)$。

证明： 对 $A=\mathrm{Rad}(R_R)$ 应用引理 7.3.1。对此，引理 7.3.1 中的(4)成立。由定理 7.2.1 知 A 是两边理想，故 A 也是左理想，所以引理中关于等式左边的叙述也成立。因此，$\mathrm{Rad}(R_R)\hookrightarrow\mathrm{Rad}({}_RR)$。由对称性，反包含关系也成立，从而等式成立。

定义 7.3.1 $\mathrm{Rad}(R)=\mathrm{Rad}(R_R)=\mathrm{Rad}({}_RR)$。

一般地，$R/\mathrm{Rad}(R)$ 不是半单的。例如，对 $R=\mathbb{Z}$ 有 $\mathrm{Rad}(\mathbb{Z})=0$，$\mathbb{Z}/\mathrm{Rad}(\mathbb{Z})=\mathbb{Z}/(0)\cong\mathbb{Z}$，而 $\mathbb{Z}$ 是非半单的。然而，如果 $R/\mathrm{Rad}(R)$ 是半单的，则可得到有趣的结果。

定理 7.3.2 如果 R 是一个环，且 $R/\mathrm{Rad}(R)$ 是半单的，则有：

(1)每个单右 R - 模或单左 R - 模同构于 $(R/\mathrm{Rad}(R))_R$ 或 $_R(R/\mathrm{Rad}(R))$ 的一个子模。

(2)$R/\mathrm{Rad}(R)$ 的块数是有限的，等于右 R - 模的同构类的个数，也等于单左 R - 模的同构类的个数。

证明：

(1)因每个循环右 R - 模 $M_R = mR$ 是 R_R 的同态像，于是就有 $M \cong R/A(A \hookrightarrow R_R)$。如果 M_R 是单的，则 A 一定是极大的。因此，$\mathrm{Rad}(R) \hookrightarrow A$，于是得

$$M \cong R/A \cong [R/\mathrm{Rad}(R)]/[A/\mathrm{Rad}(R)]。$$

由于 $\overline{R} = R/\mathrm{Rad}(R)$ 是半单的，$\overline{A} = A/\mathrm{Rad}(R)$ 是一个直和项，因此 $\overline{R_R} = \overline{A} \oplus \overline{B}$。于是，$M_R \cong \overline{B_R}$。类似地可证"左"的论述。

(2)就像我们所知道的，$\overline{R_R}$ 的 R - 子模与 $\overline{R}$ 的右理想相吻合。两个 R - 子模同构$\Leftrightarrow$作为 $\overline{R}$ 的右理想是同构的。于是由引理 5.2.1 和推论 6.2.1，结论成立。

在定理 7.2.1 中，已经证得 $M\mathrm{Rad}(R_R) \hookrightarrow \mathrm{Rad}(M)$。现在给出保证 $M\mathrm{Rad}(R_R) = \mathrm{Rad}(M)$ 成立的一个充分条件。

定理 7.3.3 如果 $R/\mathrm{Rad}(R)$ 是个单环，则对每个模 M_R 有：

(1)$\mathrm{Rad}(M) = M\mathrm{Rad}(R)$；

(2)$\mathrm{Soc}(M) = l_M(\mathrm{Rad}(M)) = \{m \mid m \in M \wedge M\mathrm{Rad}(R) = 0\}$。

证明：

(1)由于 $[M/M\,\mathrm{Rad}(R)]\mathrm{Rad}(R) = 0$，故 $M/M\,\mathrm{Rad}(R)$ 可视为 $R/\mathrm{Rad}(R)$ - 模，从而 R - 子模与 $R/\mathrm{Rad}(R)$ - 子模是相同的。作为半单环 $R/\mathrm{Rad}(R)$ 上的模，由推论 6.2.1 可知，$M/M\,\mathrm{Rad}(R)$ 是半单的。因此由定理 7.2.1(1)可知，$\mathrm{Rad}(M/M\,\mathrm{Rad}(R)) = 0$。由定理 7.1.2(2)知，$\mathrm{Rad}(M) \hookrightarrow M\,\mathrm{Rad}(M)$，从而由定理 7.2.1(2)知(1)成立。

(2)首先由定理 7.2.1(1)和(2)知 $\mathrm{Soc}(M) \hookrightarrow l_M(\mathrm{Rad}(R))$。另一方面，作为 $R/\mathrm{Rad}(R)$ - 模，$l_M(\mathrm{Rad}(R))$ 是半单的，因此也可作为 R - 模，所以就有 $l_M(\mathrm{Rad}(R)) \hookrightarrow \mathrm{Soc}(M)$。

定义 7.3.2 环 R 的右(左，两边)理想 A 叫作诣零的 :$\Leftrightarrow$ $\forall a \in A$，$(a^n = 0)$；或者幂零理想 :$\Leftrightarrow$ $\exists n \in \mathbb{N}$，$A^n = 0$。

推论 7.3.1

(1)每个单边或双边幂零理想是诣零理想。

(2)两个幂零右(左，两边)理想的和仍是幂零的。

(3)如果 R_R 是诺特的，则每个两边诣零理想都是幂零的。

证明：

(1)显然。

(2)令 $A \hookrightarrow R_R$，$B \hookrightarrow R_R$，$A^m=0$，$B^n=0$。断言 $(A+B)^{m+n}=0$。令 $a_i \in A$，$b_i \in B$ $(i=1, 2, \cdots, m+n)$，则由二项式定理，$\prod_{i=1}^{m+n}(a_i+b_i)$ 为至少有 m 个因子属于 A 或至少有 n 个因子属于 B 的 $(m+n)$ 个因子之积。由于 A 和 B 是右理想，结论因而成立。

(3)令 N 是 R 的两边诣零理想。因 R_R 是诺特的，于是在 N 所包含的幂零理想中一定有一个是极大的。令 A 是这样的理想，假设 $A^n=0$，由(2)，A 是含于 N 的最大幂零理想。事实上，A 是双边理想。因为 $\forall b \in N$，故 $(bR)^k \hookrightarrow A$。于是，$(bR)^{kn}=0$，从而 $bR \hookrightarrow A$。

因此断言 $A=N$。假设 $A \neq N$，则选 $b \in N \setminus A$(即 A 在 N 内的集合补)，使得 $r_R(b, A)=\{r \mid r \in R \wedge br \in A\}$ 是极大的。$\forall x \in R$，由于 N 和 A 是双边理想，则 $xb \in N$，且 $r_R(b, A) \hookrightarrow r_R(xb, A)$。所以，对 $xb \notin A$，有 $r_R(b, A)=r_R(xb, A)$。对 $xb \notin A$，令 $(xb)^k \in A$，$(xb)^{k-1} \notin A$，由于 xb 是幂零的，这样的 k 是存在的。于是 $r_R(b, A)= r_R((xb)^{k-1}, A)$，因此 $bxb \in A$，从而 $(bR)^2 \hookrightarrow A$，在此用到了 A 的两边性。如同开始所建立的，$bR \hookrightarrow A$。因此 $b \in A$，矛盾。

定理 7.3.4 Rad(R)含有每个(单边的、双边的)诣零理想。

证明：

设 A 是一个诣零理想，$a \in A$，$a^n=0$，则有

$$(1+a+a^2+\cdots+a^{n-1})(1-a)=(1-a)(1+a+a^2+\cdots+a^{n-1})=1-a^n=1$$

i. e. $1-a$ 有一个逆元，由引理 7.3.1，$A \hookrightarrow \mathrm{Rad}(R)$。

定理 7.3.5 若 R_R 是阿廷的，则 Rad(R)是幂零的。

证明：

为了简便，令 $U=\mathrm{Rad}(R)$，由于 R_R 是阿廷的，则链

$$R \hookleftarrow U \hookleftarrow U^2 \hookleftarrow \cdots$$

是有限的。i. e. $\exists\ n \in \mathbb{N}$，使得 $U^n=U^{n+1}(i \in \mathbb{N})$。要证明 $U^n=0$，假设 $U^n \neq 0$，则右理想集合

$$\Gamma=\{A \mid A \hookrightarrow R_R \wedge AU^n \neq 0\}$$

是非空的(因为 $U \in \Gamma$)。由假设，存在极小的 $A_0 \in \Gamma$。因此，存在 $a_0 \in A_0$，使得 $a_0U^n \neq 0$，故也有 $a_0RU^n \neq 0$。由 A_0 的极小性，$a_0R=A_0$。由于 $U^n=U^{n+1}$ 和 $RU=U$，则进一步地推出

$$a_0RU^n=a_0RUU^n=a_0U \cdot U^n。$$

从而有 $a_0U=a_0R=A_0$ 成立。由于 R_R 是有限生成的和 $U=\mathrm{Rad}(R)$，故另一方面，由中山引理，$a_0U=a_0RU \hookrightarrow a_0R$，所以 $a_0U \neq a_0R$，矛盾。

推论 7.3.2

(1)若 R 是交换的和阿廷的，则 Rad(R)是 R 的最大幂零左、右、双边理想。

(2)若 R 是交换的和阿廷的，则 Rad(R)是 R 的所有幂零元素构成的集合。

(3)若 R 是阿廷的，则对每个右 R - 模 M_R 和左 R - 模$_RM$，分别有

$$\mathrm{Rad}(M)=M\mathrm{Rad}(R)\hookrightarrow M \text{ 与 } \mathrm{Rad}(M)=\mathrm{Rad}(R)\ M\hookrightarrow M。$$

证明留给读者。

定理 7.3.6 令 $R/\mathrm{Rad}(R)$ 是半单的，Rad(R)是幂零的，则对模 M_R，下列是等价的：

(1)M_R 是阿廷的；

(2)M_R 是诺特的；

(3)M_R 有有限长度。

类似地，可写出左 R - 模的等价叙述。

证明：

由于(1)和(2)等价于(3)，故只证(1)和(2)等价就够了。置 $U=\mathrm{Rad}(R)$，则定义 $e(M)=\mathrm{Min}\{i\mid i\in\mathbb{N}\wedge MU^i=0\}$。由于存在 $n\in\mathbb{N}$，使 $U^n=0$，故 $e(M)$存在。因此 $MU^n=0$，对 $e(M)$利用归纳法对所有的模 $M_R\neq 0$ 进行证明。

对 $e(M)=1$，i. e. $MU=0$，则置 $m(r+U)=mr$，$r\in R$，$m\in M$，M 构成了 $\overline{R}=R/U$ - 模，而且 M 的 R - 子模与 $\overline{R}$ - 子模相吻合。由于 $\overline{R}$ 是半单的，故 M 是半单的(推论 6.2.1)。于是，再由定理 6.1.2，(1)与(2)是等价的。

今假设当 $e(M)\leqslant k$ 时，对所有的 M，结论成立。假设 $e(M)=k+1$，则 $e(MU^k)=1$。由于$(M/MU^k)U^k=0$，进一步有 $e(M/MU^k)\leqslant k$。

令 M 是阿廷的或诺特的，则由定理 4.1.1，MU^k 和 M/MU^k 均是阿廷或诺特的。由归纳假设，二者均是诺特或阿廷的。再由定理 4.1.1 知，M 是诺特或阿廷的。

推论 7.3.3

(1)令 R_R 是阿廷的，M_R 是阿廷的或诺特的，则 M_R 也是诺特的或阿廷的。

(2)如果 R_R 是阿廷的，则 R_R 是诺特的。

(3)如果 R_R 是阿廷的，$_RR$ 是诺特的，则$_RR$ 是阿廷的。

请读者自己完成证明。

习题 7.3

1. 证明推论 7.3.2。
2. 证明推论 7.3.3。

7.4 有限生成模和有限余生成模的特征

前面讨论了有限生成模和有限余生成模，特别地，对诺特和阿廷模的特征进行研究时，引用了它们(第4章)，现做进一步的研究。

定理 7.4.1 当且仅当有以下两个条件时，M_R 是有限生成的成立：

(1) $\mathrm{Rad}(M)\overset{\circ}{\hookrightarrow} M$；

(2) $M/\mathrm{Rad}(M)$ 是有限生成的。

证明：

令 M_R 是有限生成的，则(1)可由定理 7.2.1(3)得证。由于 M 的每个满同态像均是有限生成的，故(2)也成立。

今假设(1)与(2)均成立，令 $\overline{x_i}=x_i+\mathrm{Rad}(M)$，$i=1, 2, \cdots, n$ 是 $M/\mathrm{Rad}(M)$ 的有限生成元集，则

$$x_1R+\cdots+x_nR+\mathrm{Rad}(M)=M,$$

由于 $\mathrm{Rad}(M)\overset{\circ}{\hookrightarrow} M$，故有 $x_1R+x_2R+\cdots+x_nR=M$。因此，M 是有限余生成的。

推论 7.4.1 模 M_R 是诺特的当且仅当对每个 $U\hookrightarrow M$，有

(1) $\mathrm{Rad}(U)\overset{\circ}{\hookrightarrow} U$；

(2) $U/\mathrm{Rad}(U)$ 是有限生成的。

证明：

由定理 4.1.1 和定理 7.4.1 即可得证。

现在考虑有限余生成模。

定理 7.4.2 对非零模 M_R，下列条件是等价的：

(1) M 是有限余生成的。

(2) ①$\mathrm{Soc}(M)\overset{*}{\hookrightarrow} M$；②$\mathrm{Soc}(M)$ 是有限余生成的。

(3) 对 M 的内射包 $I(M)$，有 $I(M)=Q_1\oplus\cdots\oplus Q_n$，这里每个 Q_i 都是单 R－模的内射包。

证明：

"(1) ⇒ (2)"：①利用佐恩引理，证明 M 的每个子模 U_1 都含有一个单子模 E，从而成立 $U\cap\mathrm{Soc}(M)\neq 0$。令 $\Gamma=\{U_i \mid i\in I\}$ 是 U 的所有非零子模集。由于 $U\in\Gamma$，$\Gamma\neq\varphi$，在 Γ 内定义偏序如下：

$$U_i\leqslant U_j :\Leftrightarrow U_j\hookrightarrow U_i \quad (\text{逆包含})。$$

令 $\Lambda=\{A_j|j\in J\}$ 是 Γ 的全序子集，我们证明 $D=\cap\bigcup_{j\in J}A_j$ 是 Λ 在 Γ 内的一个上界。若假设 $D=0$，则由(1)，∃有限个 A_j，其交为0。由于 Λ 是全序的，故在这些 A_j 中一定有一个最大元素(相对于逆包含)，这个元一定等于0，此与 $U_i\neq 0$ 矛盾！因此 $D\neq 0$，所以 $D\in\Gamma$，由佐恩引理，Γ 内存在一个极大元 U_0，这个 U_0 显然是 U 的单子模。

②由有限余生成子模的定义知 M 的每个子模均是有限余生成的，从而 $\mathrm{Soc}(M)$ 也是有限余生成的。

"(2) ⇒ (1)"：由 $\bigcap_{i\in I}A_i=0$，$(A_i\hookrightarrow M)$，得 $\bigcap_{i\in I}\mathrm{Soc}(A_i)=0$。

由于 $\mathrm{Soc}(A_i)\hookrightarrow\mathrm{Soc}(M)$，且 $\mathrm{Soc}(M)$ 是有限余生成的，故存在有限子集 $I_0\subset I$，使得 $\bigcap_{i\in I_0}\mathrm{Soc}(A_i)=0$。对 M 的任意子模 $A\hookrightarrow M$，由基座的定义，有 $\mathrm{Soc}(A)=A\cap\mathrm{Soc}(M)$。所以 $0=\bigcap_{i\in I_0}\mathrm{Soc}(A_i)=\bigcap_{i\in I_0}(A_i\cap\mathrm{Soc}(M))=(\bigcap_{i\in I_0}A_i)\cap\mathrm{Soc}(M)$，由假设 $\mathrm{Soc}(M)\hookrightarrow^{*} M$，我们最后 $\bigcap_{i\in I_0}A_i=0$，从而"(2) ⇒ (1)"成立。

"(2) ⇒ (3)"：令 $I(M)$ 是 M 的内射包且 $M\hookrightarrow I(M)$，有令 $M\neq 0$，由于 $\mathrm{Soc}(M)\hookrightarrow^{*} M$，于是 $\mathrm{Soc}(M)\neq 0$，令 $\mathrm{Soc}(M)=E_1\oplus E_2\oplus\cdots\oplus E_n$，$E_i$ 是单子模，令 $Q_i\hookrightarrow I(M)$ 是 E_i 的内射包，则由推论 3.1.1，有 $\sum_{i=1}^{n}Q_i=\bigoplus_{i=1}^{n}Q_i$(作为 $I(M)$ 内直和)及 $\mathrm{Soc}(M)\hookrightarrow\bigoplus_{i=1}^{n}Q_i$。由于内射模的有限直和仍是内射的，故 $\bigoplus_{i=1}^{n}Q_i$ 是内射的，因此是 $I(M)$ 的一个直和。由于 $\mathrm{Soc}(M)\hookrightarrow^{*} M$，$M\hookrightarrow^{*} I(M)$，于是 $\mathrm{Soc}(M)\hookrightarrow^{*} I(M)$。因此也有 $\bigoplus_{i=1}^{n}Q_i\hookrightarrow^{*} I(M)$，于是 $\bigoplus_{i=1}^{n}Q_i=I(M)$，此为所欲证者。

"(3) ⇒ (2)"：不是一般性，仍假设 $M\hookrightarrow I(M)=\bigoplus_{i=1}^{n}Q_i$ 及 $E_i\hookrightarrow^{*} Q_i$，$E_i$ 是单的。由于 $E_i\hookrightarrow^{*} Q_i$，$E_i$ 是 Q_i 的唯一单子模，由推论 7.1.2 有

$$\mathrm{Soc}(I(M))=\bigoplus_{i=1}^{n}\mathrm{Soc}(Q_i)=\bigoplus_{i=1}^{n}E_i。$$

由于 $M\hookrightarrow^{*} I(M)$，有 $E_i\hookrightarrow M\quad(i=1,2,\cdots,n)$，因此 $\mathrm{Soc}(M)=\bigoplus_{i=1}^{n}E_i$。由定理 6.1.2，$\mathrm{Soc}(M)$ 是有限余生成的，i. e. (2)②是满足的。由于

$$\mathrm{Soc}(M)=\mathrm{Soc}(I(M))\hookrightarrow^{*} I(M)。$$

也有 $\mathrm{Soc}(M)\hookrightarrow^{*} M$，即"(2)①"是满足的。

推论 7.4.2 模 M_R 是阿廷的⇔对每个商模 M/U 成立：

(1) $\mathrm{Soc}(M/U)\hookrightarrow^{*} M/U$；

(2) $\mathrm{Soc}(M/U)$ 是有限余生成的。

证明：

由定理 4.1.1 与定理 7.4.2 即可得证。

习题 7.4

1. 证明：对左理想 $U \hookrightarrow {}_RR$，下列是等价的：

(1) $(\prod_{i\in I} M_i)U = \prod_{i\in I}(M_iU)$ 对每个右 R－模族 $(M_i|i\in I)$ 成立。

(2) ${}_RU$ 是有限生成的。

7.5 阿廷环和诺特环的特征

在第4章，叙述了下面的定理 7.5.1，但只证明了一部分。

定理 7.5.1

(1) 下列条件是等价的：

①R_R 是诺特的；

②每个内射模 Q_R 是不可分解（内射）子模的直和。

(2) 下列条件是等价的：

①R_R 是阿廷的；

②每个内射模 Q_R 是单 R－模内射包的直和。

证明：

在命题 4.5.1 中，证明了“① ⇒ ②”，由此和推论 7.3.3 仅假设(2)内的 R_R 是阿廷的就够了。

(1)“② ⇒ ①”：只证定理 4.4.1 的条件(3)成立即可。

令 $M = \bigoplus_{i=1}^{\infty} Q_i$ 是单 R－模 $E_i \hookrightarrow Q_i$ 的内射包 Q_i 的直和。设 $I(M)$ 是 $M \hookrightarrow I(M)$ 的内射包，可证明 $M = I(M)$。由于 $M \hookrightarrow^{*} I(M)$，有 $\mathrm{Soc}(M) = \mathrm{Soc}(I(M))$。进一步有

$$\mathrm{Soc}(M) = \bigoplus_{i=1}^{\infty}\mathrm{Soc}(Q_i) = \bigoplus_{i=1}^{\infty}E_i。$$

现在利用假设 $I(M) = \bigoplus_{i\in I} D_j$，此处 D_j 是不可分解的内射模。令

$$J_1 = \{j \mid j\in J \wedge \mathrm{Soc}(D_j)\neq 0\},$$

则有

$$\mathrm{Soc}(I(M)) = \bigoplus_{\in J_1}\mathrm{Soc}(D_j)。$$

若 $\mathrm{Soc}(D_j)\neq 0$，由推论 4.5.1，$F_j = \mathrm{Soc}(D_j)$ 是单的，D_j 是 F_j 的内射包。因此，

$$\mathrm{Soc}(I(M)) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} E_i = \bigoplus_{i \in J_1} F_j。$$

由克鲁尔－雷马克－施密特定理，这两个分解是同构的。如果 $E_i \cong F_j$，由定理 3.6.1，$Q_i \cong D_j$。再由克鲁尔－雷马克－施密特定理，得到

$$M = \bigoplus_{i=1}^{\infty} Q_i \cong \bigoplus_{i \in J_1} D_j。$$

由于 $I(M) = (\bigoplus_{i \in J_1} D_j) \oplus (\bigoplus_{j \in J/J_1} D_j)$，所以 M 同构于内射模 $I(M)$ 的直和项，从而本身也是内射的。

(2)"② ⇒ ①"：由推论 7.4.2，只要证明 R_R 的每个商模满足定理 7.4.2 的条件(3)就够了。令 $I(R/A)$ 是 R/A 的内射包，且 $R/A \hookrightarrow I(R/A)$。由假设有 $I(R/A) = \bigoplus_{i \in I} Q_i$，此处 Q_i 是单 R－模的内射包。由于 R/A 是循环的，故 R/A 含于有限多个 Q_i 的直和内：$R/A \hookrightarrow \bigoplus_{i \in I_0} Q_i$，$I_0$ 有限。由于 $R/A \stackrel{\cdot}{\hookrightarrow} I(R/A)$，故 $I = I_0$。亦即 $I(R/A) = \bigoplus_{i \in I_0} Q_i$，此即为所欲证者。

习题 7.5

1. 对模 M_R，定义

(1) M 是半阿廷的 :⇔ $\forall\, U \stackrel{\cdot}{\hookrightarrow} M$，$\mathrm{Soc}(M/U) \neq 0$；

(2) $S_a(M) = \sum\limits_{\substack{U \hookrightarrow M \\ U\text{是半阿廷的}}} U$。

证明：

(1) M 是半阿廷的 ⇒ $\forall\, U \hookrightarrow M$，$M/U$ 是半阿廷的；

(2) 对任模 M，$S_a(M)$ 是半阿廷的；

(3) $\hookrightarrow M$，$N \in \mathcal{M}_R$，$\forall\, \varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$，$\varphi(S_a(M)) \hookrightarrow S_a(N)$；

(4) $S_a(S_a(M)) = S_a(M)$；

(5) $S_a(M/S_a(M)) = 0$；

(6) M 是半阿廷的 ⇒ $\mathrm{Soc}(M) \stackrel{\cdot}{\hookrightarrow} M$；

(7) M 是半阿廷的 ⇒ $\forall\, U \hookrightarrow M$，$\mathrm{Soc}(M/U) \stackrel{\cdot}{\hookrightarrow} M/U$；

(8) 令 $U \hookrightarrow M$，则 M 是半阿廷的 ⇔ M/U 是半阿廷的并且 U 是半阿廷的；

(9) A 是半阿廷的，M 是诺特的 ⇔ M 是阿廷的，M 是诺特的；

(10) M 是半阿廷的，R_R 是诺特的 ⇒ M 是它的阿廷子模的和。

2. 定义：

(1) M 是半诺特的 :⇔ $\forall\, U \hookrightarrow M$，$U \neq 0$，$\mathrm{Rad}(U) \neq U$；

（2）$S_{nr}(M) = \sum\limits_{\substack{U \hookrightarrow M \\ \mathrm{Rad}(U)=U}} U$。考虑上题的对偶性质是否成立。

7.6　内射模和投射模的自同态环的根基

由于某些考虑，知道内射模与投射模的自同态环是很有益处的。作为应用，对于投射模 $P \neq 0$，总有 $\mathrm{Rad}(P) \neq P$。此即表明 P 总是含有极大子模。

定理 7.6.1

（1）令 Q_R 是内射的，$S = \mathrm{End}(Q_R)$，则对 $\alpha \in S$，有

$$S\alpha \hookrightarrow {}_S S \Leftrightarrow \alpha \in \mathrm{Rad}(S) \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(\alpha) \hookrightarrow Q_R。$$

（2）令 P_R 是投射的，$S = \mathrm{End}(P_R)$，则对 $\alpha \in S$，有

$$S\alpha \hookrightarrow S_S \Leftrightarrow \alpha \in \mathrm{Rad}(S) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(\alpha) \hookrightarrow P_R。$$

证明：

（1）"$S\alpha \hookrightarrow {}_S S \Leftrightarrow \alpha \in \mathrm{Rad}(S)$"：由推论 7.1.2 可得证。

"$\alpha \in \mathrm{Rad}(S) \Rightarrow \mathrm{Ker}(\alpha) \hookrightarrow Q_R$"：令 $U \hookrightarrow Q_R$ 使 $\mathrm{Ker}(\alpha) \cap U = 0$，则 $\alpha_0 = \alpha|_U$ 是一个单同态。令 l：$U \to Q$ 是包含映射，从而存在同态 β：$Q \to Q$ 使图 7.1 交换。对 $\forall u \in U$，由于 $u = l(u) = \beta\alpha_0(u) = \beta\alpha(u)$，有 $U \hookrightarrow \mathrm{Ker}(1-\beta\alpha)$。由于 $\alpha \in \mathrm{Rad}(S)$，故 $\beta\alpha \in \mathrm{Rad}(S)$。由引理 7.3.1，$1-\beta\alpha$ 是可逆的，因此 $\mathrm{Ker}(1-\beta\alpha)=0$。所以，$U=0$，即有 $\mathrm{Ker}(\alpha) \hookrightarrow Q$。

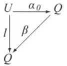


图 7.1

"$\mathrm{Ker}(\alpha) \hookrightarrow Q_R \Rightarrow S\alpha \hookrightarrow {}_S S$"：令 $S\alpha + \Gamma = {}_S S$，其中，$\Gamma \hookrightarrow {}_S S$。故存在 $\sigma \in S$，$\gamma \in \Gamma$，使得 $\sigma\alpha + \gamma = 1$。于是就有 $\mathrm{Ker}(\alpha) \cap \mathrm{Ker}(\gamma) = 0$。由于 $\mathrm{Ker}(\alpha) \hookrightarrow Q_R$，则推得 $\mathrm{Ker}(\gamma) = 0$。所以，存在同态 δ：$Q \to Q$ 使图 7.2 交换。亦即，$1_Q = \delta\gamma$，于是 $\Gamma = S$，$S\alpha \hookrightarrow {}_S S$。

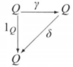


图 7.2

(2)“$\alpha\in \mathrm{Rad}(S)\Rightarrow \mathrm{Im}(\alpha)\overset{\circ}{\hookrightarrow} R_R$”：令 $U\hookrightarrow R_R$ 使 $\mathrm{Im}(\alpha)+U=P$。设 γ：$P\to P/U$ 是自然满同态，则 $\gamma\alpha$ 是满同态。那么得到如下一个交换图 7.3。由 $\gamma=\gamma\alpha\beta$ 得 $\gamma(1-\alpha\beta)=0$。因此，$\mathrm{Im}(1-\alpha\beta)\hookrightarrow U$。由于 $\alpha\in\mathrm{Rad}(S)$，也有 $\alpha\beta\in\mathrm{Rad}(S)$。由引理 7.3.1，$1-\alpha\beta$是可逆的。因此

$$P=\mathrm{Im}(1-\alpha\beta)\hookrightarrow U\hookrightarrow P。$$

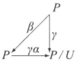


图 7.3

i. e. $U=P$。所以，证明了 $\mathrm{Im}(\alpha)\overset{\circ}{\hookrightarrow} P_R$。

“$\mathrm{Im}(\alpha)\overset{\circ}{\hookrightarrow} P_R\Rightarrow \alpha S\overset{\circ}{\hookrightarrow} S_S$”：令 $\alpha S+\Gamma=S_S$(其中，$\Gamma\hookrightarrow S_S$)，则存在 $\sigma\in S$，$\gamma\in\Gamma$，使得 $\alpha\sigma+\gamma=1$。因此有 $\mathrm{Im}(\alpha)+\mathrm{Im}(\gamma)=P$。由于 $\mathrm{Im}(\alpha)\overset{\circ}{\hookrightarrow} P_R$，故 $\mathrm{Im}(\gamma)=P$。所以，γ 是满同态，从而存在 δ：$P\to P$ 使得图 7.4 是交换的。因此，有 $1_P=\gamma\delta$。于是 $\Gamma=S$。

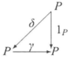


图 7.4

推论 7.6.1 令 Q_R 是内射的且 $S=\mathrm{End}(Q_R)$，则对每个 $\alpha\in S$，存在 $\gamma\in S$ 使得 $\alpha\gamma\alpha-\alpha\in\mathrm{Rad}(S)$。

证明：

令 $\alpha\in S$，U 是 $\mathrm{Ker}(\alpha)$ 在 Q 内的交补。由引理 3.2.3，有 $\mathrm{Ker}(\alpha)+U\overset{*}{\hookrightarrow} Q$。由于 $\mathrm{Ker}(\alpha)\cap U=0$，故 $\alpha_0:=\alpha|_U$是单一同态。因此，存在 $\gamma\in S$，使得图7.5 是交换的，这里的 l 是包含映射。对 $u\in U$，则有

$$\gamma\alpha(u)=\gamma\alpha_0(u)=u。$$

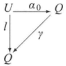


图 7.5

因此，有

$$\mathrm{Ker}(\alpha)+U\hookrightarrow\mathrm{Ker}(\alpha\gamma\alpha-\alpha)。$$

因为 $\mathrm{Ker}(\alpha)+U\overset{*}{\hookrightarrow} Q$，所以 $\mathrm{Ker}(\alpha\gamma\alpha-\alpha)\overset{*}{\hookrightarrow} Q$。由定理 7.6.1，$\alpha\gamma\alpha-\alpha\in\mathrm{Rad}(S)$。

这个结果是说 $S/\mathrm{Rad}(S)$ 为一个正则环，下一章将介绍正则环并讨论它。

关于投射模的根基，有以下定理。

定理 7.6.2　对每个投射模 $P\neq 0$，有 $\mathrm{Rad}(P)\neq P$。

证明：

进行一般的考虑。如果 $p\in P_R$，$\varphi\in P^* = \mathrm{Hom}_R(P_R, R_R)$，则 $p\varphi$ 可看作为 $S=\mathrm{End}(P_R)$ 中的元素。亦即对 $x\in P$，$(p\varphi)(x)=p\varphi(x)$。则由

$$\begin{aligned}(p\varphi)(x_1r_1+x_2r_2) &= p\varphi(x_1r_1+x_2r_2)\\ &= p(\varphi(x_1)r_1+\varphi(x_2)r_2)\\ &= p(\varphi(x_1))r_1+(p\varphi(x_2))r_2\\ &= (p\varphi)(x_1)r_1+(p\varphi)(x_2)r_2\end{aligned}$$

知，$p\varphi\in S$。今令 $p\in\mathrm{Rad}(P)$，则 $pR\dot{\hookrightarrow} P_R$。所以有 $\mathrm{Im}(p\varphi)=p\varphi(P)\dot{\hookrightarrow} P_R$（由于 $p\varphi(P)\hookrightarrow pR$。故由定理 7.6.1 的(2)知 $p\varphi S\dot{\hookrightarrow} S_S$。令 $x=\sum\limits_{\varphi_i(x)\neq 0} p_i\varphi_i(x)$ 是 x 的在定理 7.6.2 意义下的表示（对偶基引理）。如果假设 $x\neq 0$，适当地调整下标，不妨设 $i=1,2,\cdots,n$ 时，$\varphi_i(x)\neq 0$，则

$$1_P(x)=x=\sum_{i=1}^{n} p_i\varphi_i(x)=\left(\sum_{i=1}^{n} p_i\varphi_i\right)(x)$$

$$\Rightarrow \left(1_P-\sum_{i=1}^{n} p_i\varphi_i\right)(x)=0,\ (p_i\varphi_i\in S)。$$

若假设 $\mathrm{Rad}(P)=P$，则有 $\mathrm{Im}(p_i\varphi_i)\dot{\hookrightarrow} P_R$。因此 $p_i\varphi_iS\dot{\hookrightarrow} S_S$，从而 $p_i\varphi_i\in\mathrm{Rad}(S)$。最后，$\sum\limits_{i=1}^{n} p_i\varphi_i\in\mathrm{Rad}(S)$。由引理 7.3.1 知 $1_P-\sum\limits_{i=1}^{n} p_i\varphi_i$ 是 S 内可逆元素。令 $\sigma\in S$ 是其逆元，则

$$x=1_P(x)=\sigma\left(1-\sum_{i=1}^{n} p_i\varphi_i\right)(x)=\sigma(0)=0。$$

矛盾。于是在假设 $P=\mathrm{Rad}(P)$ 下，一定有 $P=0$。

推论 7.6.2　如果 P 是投射的且 $P = P_1\oplus P_2$，$P_2\hookrightarrow\mathrm{Rad}(P)$，则 $P_2=0$。

证明留给读者。

习题 7.6

1. 证明推论 7.6.2。

7.7 良　　环

就像在定理7.2.1(2)中所见到的，总有 $M\text{Rad}(R_R)\hookrightarrow \text{Rad}(M)$，那么什么时候等号成立？对于任意模或任意环，这绝对不会成立。例如，$\text{Rad}(\mathbb{Z})=0$。但就我们所知，存在非零根基的$\mathbb{Z}$-模，比如说，$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ 或$\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$，($\text{Rad}(\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}})=\mathbb{Q}$)。

下面的定理7.7.1给出了某种信息：

定理7.7.1　令 $\boldsymbol{M}_R$ 是右 R-模全体，$\bar{R}=R/\text{Rad}(R)$，则下列条件是等价的。

(1) $\forall M\in \boldsymbol{M}_R$，$M\text{Rad}(R)=\text{Rad}(M)$；

(2) $\forall M\in \boldsymbol{M}_R$，$M\text{Rad}(R)=0 \Rightarrow \text{Rad}(M)=0$；

(3) $\forall \Omega\in M_{\bar{R}}$，$\text{Rad}(\Omega)=0$；

(4) $\forall M、N\in \boldsymbol{M}_R$，$\forall \varphi\in \text{Hom}_R(M, N)$，$\varphi(\text{Rad}(M))=\text{Rad}(\varphi(M))$；

(5) $\forall M\in \boldsymbol{M}_R$，$\forall U\hookrightarrow M$，$\text{Rad}(M)+U/U=\text{Rad}(M/U)$；

(6) $\forall M\in \boldsymbol{M}_R$，$\forall U\hookrightarrow M$，$\text{Rad}(M)=0\Rightarrow \text{Rad}(M/U)=0$。

证明：

只看证明："(1) ⇒ (2) ⇒ (3) ⇒ (1)"和"(1) ⇒ (4) ⇒ (5) ⇒ (6) ⇒ (1)"。

"(1) ⇒ (2)"：显然。

"(2) ⇒ (3)"：令 $\Omega\in M_{\bar{R}}$，则 Ω 由下列定义可构成一个 R-模。

$$\omega\gamma=\overline{\omega\gamma},\ \omega\in\Omega,\ \bar{\gamma}=\gamma+\text{Rad}(R)\in\bar{R}.$$

由于将 Ω 视为右 R-模，显然有 $\Omega\text{Rad}(R)=0$。由(2)便得知 $\text{Rad}(\Omega_R)=0$。由 Ω_R 的定义，Ω 的 $\bar{R}$ 子模与 R-子模相吻合。于是，$\text{Rad}(\Omega_R)=0$。

"(3) ⇒ (1)"：由于$[M/M\text{Rad}(R)]\text{Rad}(R)=0$，故 $M/M\text{Rad}(R)$按下面

$$\bar{m}\cdot\bar{r}=[m+M\text{Rad}(R)][r+\text{Rad}(R)]=\overline{mr}=mr+M\text{Rad}(R)$$

定义的模乘法也构成 $\bar{R}$-模。在此定义下，$M/M\text{Rad}(R)$的 $\bar{R}$-子模与 R-子模相吻合。由 $\text{Rad}((M/M\text{Rad}(R))_{\bar{R}})=0$ 得 $\text{Rad}((M/M\text{Rad}(R))_R)=0$。因此，由定理7.1.2(2)有：$\text{Rad}(M)\hookrightarrow M\text{Rad}(R)$。故由定理7.2.1(2)知 $\text{Rad}(M)=M\text{Rad}(M)$。

"(1) ⇒ (4)"：由 $M\text{Rad}(R)=\text{Rad}(M)\wedge\varphi(M)\text{Rad}(R)=\text{Rad}(\varphi(M))$得

$$\varphi(\text{Rad}(M))=\varphi(M\text{Rad}(R))=\varphi(M)\text{Rad}(R)=\text{Rad}(\varphi(M)).$$

"(4) ⇒ (5)"：这是 $\varphi=\gamma$：$M\to M/U$ 的特殊情形。

"(5) ⇒ (6)"：这是 $\text{Rad}(M)=0$ 的特殊情形。

"(6) ⇒ (1)"：由推论 7.1.2(1)，在模同构下，(1)成立。由于每个模是自由模的满同态像，对(1)，只要证明形如 F/U 的模成立就行了，这里其中 F 是自由模，$U \hookrightarrow F$。由定理 7.2.1(7)知，$\mathrm{Rad}(F) = F\mathrm{Rad}(R)$。故有 $\mathrm{Rad}(F/F\mathrm{Rad}(R)) = 0$。于是由(6)也有

$$\mathrm{Rad}(F/F\mathrm{Rad}(R)]/\{[F\mathrm{Rad}(R)+U]/F\mathrm{Rad}(R))\} = 0。$$

由于$[F/F\mathrm{Rad}(R)]/\{[F\mathrm{Rad}(R)+U]/F\mathrm{Rad}(R)\} \cong F/[F\mathrm{Rad}(R)+U] \cong (F/U)/\{[F\mathrm{Rad}(R)+U]/U\}$，故 $\mathrm{Rad}((F/U)/(F\mathrm{Rad}(R)+U/U)) = 0$。因此，由定理 7.1.2 的(2)，$\mathrm{Rad}(F/U) \hookrightarrow [F\mathrm{Rad}(R)+U]/U = (F/U)\mathrm{Rad}(R)$。由定理 7.2.1(2)知 $\mathrm{Rad}(F/U) = (F/U)\mathrm{Rad}(R)$。

定义 7.7.1 称满足定理 7.7.1 的条件的环为右良环。对应地，可定义左良环，两边良环称为良环。

推论 7.7.1

(1)当 $\overline{R} = R/\mathrm{Rad}(R)$ 是半单环时，环 R 是良环。

(2)由推论 7.2.1，每个(单边)阿廷环是良环。

(3)如果 R 是右良环，由推论 7.1.2(2)和定理 7.7.1 的(1)，对任意 R - 模 $M_R = \sum_{i \in I} M_i \Rightarrow \mathrm{Rad}(M) = \sum_{i \in I} \mathrm{Rad}(M_i)$。

第8章　张量积与平坦模

8.1　张　量　积

环S上的模A_S与${}_SU$的张量积$A\underset{S}{\otimes}U$是一个$\mathbb{Z}$-模（即为一个阿贝尔群）。它在多重线性代数与同调代数的研究中起到重要作用。在适当条件下，$A\underset{S}{\otimes}U$可以成为环上的模。首先给出张量积的定义，然后讨论它的一些性质及张量积的应用。

为定义$A\underset{S}{\otimes}U$，令$A\times U=\{(a,u)\mid a\in A\wedge u\in U\}$为$A$与$U$的集合的笛卡儿积。再用$F=F(A\times U,\mathbb{Z})$表示以$A\times U$中元为基底生成的自由右$\mathbb{Z}$-模。当然，也可以为左$\mathbb{Z}$-模。仍用$(a,u)$表示$F$中的元素。再令$K$是$F$的子集$D_1\cup D_2\cup T$中元素生成的$\mathbb{Z}$-模，其中：

$$D_1=\{(a+a',u)-(a,u)-(a',u)\mid a,a'\in A\text{ 且 }u\in U\},$$

$$D_2=\{(a,u+u')-(a,u)-(a,u')\mid a\in A,\ u\in U,\ u'\in U\},$$

$$T=\{(as,u)-(a,su)\mid a\in A,\ u\in U,\ s\in S\}。$$

定义 8.1.1　商模F/K称为A_S与${}_SU$在环S上的张量积，记作$A\underset{S}{\otimes}U=F/K$。元素$(a,u)\in F$在自然满同态$F\to F/K$下的像叫作$a$与$u$的张量积，记为$a\otimes u$。即$a\otimes u=(a,u)+K$。在不引起混淆的情况下，张量积$A\underset{S}{\otimes}U$可简记为$A\otimes U$。由张量积的定义，可得到张量积的如下运算规则：

(1) $(a+a')\otimes u=a\otimes u+a'\otimes u$；

(2) $a\otimes(u+u')=a\otimes u+a\otimes u'$；

(3) $as\otimes u=a\otimes su$；

(4) $0\otimes u=a\otimes 0=0$；

(5) $-(a\otimes u)=(-a)\otimes u=a\otimes(-u)$；

(6) $(a\otimes u)z=(az)\otimes u=a\otimes(uz)$，其中$z\in\mathbb{Z}$，$a\in A$，$u\in U$，$s\in S$。

注：

(1)自由右$\mathbb{Z}$-模 F 也可看作是自由左$\mathbb{Z}$-模。边是不重要的。在下面，F 与 $A\otimes S$ 的边将根据所考虑问题的需要而定。

(2)由规则(6)，$A\underset{S}{\otimes}U$ 的每个元素 t 可写成有限和的形式 $t=\sum a_i\otimes u_i$。

(3)一般来说，表示 $t=\sum a_i\otimes u_i$ 不是唯一确定的，即使是"最短长度"的表示也是如此。

(4)非零的两个模的张量积可能为零。例如，取 $A=(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})_{\mathbb{Z}}$ 和 $U={}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$，则任 $a\in A$ 与任 $u\in U$，在 $A\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}U$ 内，有

$$0\otimes 0=a\otimes 0-0\otimes u=a(3u)-(2a)\otimes u=3(a\otimes u)-2(a\otimes u)=a\otimes u。$$

因此，$A\otimes U=0$。

定义 8.1.2　设 A_S 与 ${}_SU$ 分别为右 S-模和左 S-模，$M_{\mathbb{Z}}$ 为右$\mathbb{Z}$-模，则：

(1)映射 φ：$A\times U\to M$ 称为双加性的:$\Leftrightarrow\forall a,\ a'\in A,\ \forall u,\ u'\in U$，有 $\varphi(a+a',\ u)=\varphi(a,\ u)+\varphi(a',\ u)$ 与 $\varphi(a,\ u+u')=\varphi(a,\ u)+\varphi(a,\ u')$ 成立。

(2)双加性映射 φ 称为 S-张量映射:$\Leftrightarrow\forall a\in A,\ \forall u\in U,\ \forall s\in S$，有 $\varphi(as,\ u)=\varphi(a,\ su)$ 成立。

推论 8.1.1　令 ν：$F\to F/K=A\underset{S}{\otimes}U$ 是自然满态射，τ 是它在 F 的基 $A\times U$ 上的限制，$\tau=\nu|_{A\times U}$，即，$\tau(a,\ u)=a\otimes u$。则有，对每个$\mathbb{Z}$-同态 λ：$A\underset{S}{\otimes}U\to M$，映射

$$\varphi=\lambda\tau:\ A\otimes U\to M$$

是一个 S-张量映射。特别地，τ 是 S-张量映射。

证明：

首先
$$\begin{aligned}\lambda\tau(a+a',\ u)&=\lambda[(a+a')\otimes u]=\lambda(a\otimes u+a'\otimes u)\\&=\lambda(a\otimes u)+\lambda(a'\otimes u)=\lambda\tau(a,\ u)+\lambda\tau(a',\ u)。\end{aligned}$$

其他性质可类似地证明。

下面，用 $\varphi=\lambda\tau$ 表示元素在 λ 下的像。

$$\lambda(\sum a_i\otimes u_i)=\sum\lambda(a_i\otimes u_i)=\sum\lambda\tau(a_i,\ u_i)=\sum\varphi(a_i,\ u_i)$$

用 $\mathrm{Tens}(A\times U,\ M)$ 表示 $A\times U$ 到 M 的所有 S-张量映射所构成的集合。定义

$$(\varphi_1+\varphi_2)(a,\ u)=\varphi_1(a,\ u)+\varphi_2(a,\ u),$$
$$(-\varphi)(a,\ u)=-\varphi(a,\ u),$$

则 $\mathrm{Tens}(A\times U,\ M)$ 构成一个$\mathbb{Z}$-模。映射

$$\Phi:\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A\underset{S}{\otimes}U,\ M)\ni\lambda\mapsto\varphi=\lambda\tau\in\mathrm{Tens}(A\times U,\ M)$$

是一个$\mathbb{Z}$-同态。

定理 8.1.1 φ 是一个$\mathbb{Z}$-模同构。

证明：

由推论 8.1.1 即可得证 φ 为单射。下面证明 φ 为满射。任 $\varphi \in \mathrm{Tens}(A \times U, M)$，找 $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A \otimes U, M)$ 使成立 $\varphi = \lambda\tau$。

首先，将 φ 延拓为映射 $\hat{\varphi} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(F, M)$，定义 $\hat{\varphi}$ 如下：

$$\hat{\varphi}\varphi\left(\sum (a_i, u_i)z_i\right) = \sum \varphi(a_i, u_i)z_i$$

因为 φ 是 S-张量的，所以 $K \hookrightarrow \mathrm{Ker}(\hat{\varphi})$。因此，$\hat{\varphi}$ 可在 $F/K = A \underset{S}{\otimes} U$ 上分解（定理 1.6.4 的特殊情况）。分解映射仍是一个$\mathbb{Z}$-同态，记为 λ，则有 $\varphi = \lambda\tau$。

为后面用起来方便，本书把推论 8.1.1 和定理 8.1.1 总结为下面的叙述。

推论 8.1.2 对每个 S-张量映射 φ：$A \times U \to M$，存在唯一一个$\mathbb{Z}$-同态 λ：$A \underset{S}{\otimes} U \to M$ 使成立 $\varphi = \lambda\tau$，且有 $\lambda\left[\sum (a_i \otimes u_i)\right] = \sum \varphi(a_i, u_i)$ 成立。

下面证明，在同构意义下，张量积 $A \underset{S}{\otimes} U$ 是由推论 8.1.2 唯一确定的。

更确切地：已知$\mathbb{Z}$-模 $C_{\mathbb{Z}}$，令 γ：$A \times U \to C$ 是一个 S-张量映射，它使得对每个$\mathbb{Z}$-模 M 和每个 S-张量映射 φ：$A \times M \to M$，存在唯一的一个$\mathbb{Z}$-同态 η：$C \to M$ 使得 $\varphi = \eta\gamma$。那么有$\mathbb{Z}$-模同构 $A \underset{S}{\otimes} U \cong C$。

在证明中，就像下面定理 8.1.2 所证的，可以减弱假设条件。

定理 8.1.2 令 γ：$A \times U \to C$ 是具有下列性质的 S-张量映射：

(1) 存在一个$\mathbb{Z}$-同态 σ：$C \to A \underset{S}{\otimes} U$ 使 $\tau = \sigma\gamma$，即 τ 在 γ 上的分解；

(2) 满足方程 $\gamma = \eta\gamma$（$\eta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C,)$）的元素 $\eta = 1_C$，即 γ 在 γ 上的分解是唯一的。则有$\mathbb{Z}$-模同构 $C \cong \underset{\mathbb{Z}}{A} U$。

证明：

由推论 8.1.2，存在映射 ρ：$A \underset{S}{\otimes} U \to C$ 使得 $\gamma = \rho\tau$。由假设，有 $\tau = \sigma\gamma$。于是，把二者结合起来就有 $\tau = \sigma\rho\tau$，$\gamma = \rho\sigma\gamma$。由推论 8.1.2 和假设(2)，有 $\sigma\rho = 1_{A\otimes U}$ 与 $\rho\sigma = 1_C$。因此，$C \cong A \underset{S}{\otimes} U$。

下面给出同态的张量积的定义。

设有 S-模 A_S，B_S，${}_SU$，${}_SV$ 及 S-同态

$$\alpha: A \to B \text{ 与 } \mu: U \to V,$$

则考虑映射：φ：$A \times U \ni (a, u) \mapsto \alpha(a) \otimes \mu(u) \in B \underset{S}{\otimes} V$。这是一个从 $A \times U$ 到 $B \underset{S}{\otimes} V$ 的 S-张量映射。因此，有 $\varphi(a, u) = \alpha(a) \otimes \mu(u)$。于是，由推论 8.1.2，存在从 $A \times U$ 到 $B \underset{S}{\otimes} V$ 的$\mathbb{Z}$-同态，记为 $\alpha \otimes \mu$。所以，有

$$\alpha \otimes \mu : A \underset{S}{\otimes} U \ni \sum a_i \otimes u_i \mapsto \sum \alpha(a_i) \otimes \mu(u_i) \in B \otimes V.$$

即把 α 和 μ 应用到相对应的分量上去。

定义 8.1.3 $\alpha\otimes\mu$ 称为同态 α 和 μ 的张量积。

显然，由定义 8.1.3，可证 α 和 μ 的张量积具有下列性质：

(1) $1_A\otimes 1_U = 1_{A\underset{S}{\otimes}U}$。

(2) 除 α 和 μ 外，设有同态 β: $B_S\to C_S$ 与 ν: ${}_SV\to{}_SW$，则有 $(\beta\alpha)\otimes(\nu\mu)=(\beta\otimes\nu)(\alpha\otimes\mu)$。

(3) 令 α 和 μ 是 S－模同构，则 $\alpha\otimes\mu$ 是$\mathbb{Z}$－模同构，且 $(\alpha\otimes\mu)^{-1}=\alpha^{-1}\otimes\mu^{-1}$ 成立。

现在，设 R 也是一个环，且有双模 ${}_RA_S$。定义：

$$r(\sum a_i\otimes u_i)=\sum (ra_i)\otimes u_i,\ r\in R,$$

则 $A\underset{S}{\otimes}U$ 是一个左 R－模。对一个固定的 $r\in R$，考虑映射：$A\ni a\mapsto ra\in A$。由于 ${}_RA_S$ 是双模，这显然是一个 S－同态，记为 γ'。由定义 8.1.3，

$$\gamma'\otimes 1_U: A\underset{S}{\otimes}U\ni\sum a_i\otimes u_i\mapsto\sum(ra_i)\otimes u_i\in A\underset{S}{\otimes}U$$

是一个$\mathbb{Z}$－模同态。事实上，$\gamma'\otimes 1_U$ 使 $A\underset{S}{\otimes}U$ 构成一个左 R－模。$\sum(ra_i)\otimes u_i$ 是由 r 和 $\sum a_i\otimes u_i$ 唯一确定的，与 $\sum a_i\otimes u_i$ 的代表元的选择无关。如果 ${}_SU_T$ 是双模，定义 $\sum(a_i\otimes u_i)t=\sum a_i\otimes(u_it)$，$t\in T$。则 $A\underset{S}{\otimes}U$ 构成了一个右 T－模。在 ${}_RA_S$，${}_SU_T$ 情况下，$A\underset{S}{\otimes}U$ 构成一个 (R,T)－模。

设有模同态 α：${}_RA_S\to{}_RB_S$ 与 μ：${}_SU\to{}_SV$，则

$$\alpha\otimes\mu:{}_R(A\underset{S}{\otimes}U)\to{}_R(B\underset{S}{\otimes}V)$$

是一个 R－同态。因为 $(\alpha\otimes\mu)(r\sum a_i\otimes u_i)=\sum\alpha(ra_i)\otimes\mu(u_i)=\sum r\alpha(a_i)\otimes\mu(u_i)=r\sum\alpha(a_i)\otimes\mu(u_i)=r(\alpha\otimes\mu)(\sum a_i\otimes u_i)$。对应地，若有 α：${}_RA_S\to{}_RB_S$ 与 μ：${}_SU_T\to{}_SV_T$，则 $\alpha\otimes\mu$ 是 ${}_R(A\underset{S}{\otimes}U)_T$ 到 ${}_R(B\underset{S}{\otimes}V)_T$ 的 (R,T)－双模同态。

如果 R 是 S 的中心子环，定义

$$ra=ar,\ ur=ru,\ r\in R,\ u\in U。$$

则 A_S 和 ${}_SU$ 分别为 (R,S)－双模和 (S,R)－双模。于是，$A\underset{S}{\otimes}U$ 是双边 R－模。因此有 $r(\sum a_i\otimes u_i)=\sum(ra_i)\otimes u_i=\sum(a_ir)\otimes u_i=\sum a_i\otimes(ru_i)=\sum a_i\otimes(u_ir)=(\sum a_i\otimes u_i)r$。

今设有模 ${}_RA_S$，${}_SU$ 和 ${}_RM$ 及 S-张量映射 φ：$A\times U\to M$，其中 $\varphi(ra,u)=r\varphi(a,u)$ $(r\in R)$。将 $A\underset{S}{\otimes}U$ 视为左 R－模，且在推论 8.1.2 的意义下所存在的$\mathbb{Z}$－同态 λ 也是 R－同态：$\lambda(r\sum a_i\otimes u_i)=\lambda[\sum(ra_i)\otimes u_i]=\sum\varphi(ra_i,u_i)=\sum r\varphi(a_i,u_i)=r\lambda(\sum a_i\otimes u_i)$。在情形 ${}_RA_S$，${}_SU_T$，${}_RM_T$ 下，也成立相应的结论。

现在证明映射 $\lambda: A\underset{S}{\otimes}S\ni\sum a_i\otimes s_i\mapsto\sum a_is_i\in A$ 是右 S－模 $A\underset{S}{\otimes}S$ 到 A_S 的 S－同构。事实上，由于 $\varphi: A\times S\ni(a, s)\mapsto as\in A$ 是 S-张量的，并且 $\varphi(a, ss_1)=\varphi(a, s)s_1$，所以，$\lambda$ 是 S－同态，且是满的。令 $\sum a_i\otimes s_i\in\text{Ker}(\lambda)$，则 $\sum a_is_i=0$。于是，$\sum a_i\otimes s_i=\sum(a_is_i\otimes 1)=(\sum a_is_i)\otimes 1=0\otimes 1=0$。即 λ 也是单态射。故 λ 是一个同构。类似地，也有 ${}_S(S\otimes_S U)\cong{}_SU$。

定理 8.1.3 设有模 $A_R, {}_RM_S, {}_SU$，则有 $\mathbb{Z}$－模同构

$$(A\underset{R}{\otimes}M)\underset{S}{\otimes}U\cong A\underset{R}{\otimes}(M\underset{S}{\otimes}U)。$$

证明：

用 ρ 记下面的映射

$$\rho: \sum(a_i\otimes m_i)\otimes u_i\mapsto\sum a_i\otimes(m_i\otimes u_i),$$

因而希望证明 ρ 是 $\mathbb{Z}$－模同构。考虑映射

$$\varphi_u: \times M\ni(a, m)\mapsto a\otimes(m\otimes u)\in A\underset{R}{\otimes}(M\underset{S}{\otimes}U),$$

式中，u 是 U 中的一个固定元素。显然，这是一个 R－张量映射。因此，由推论 8.1.2，存在同态 λ_u 如下：

$$\lambda_u: A\underset{R}{\otimes}M\ni\sum a_i\otimes m_i\mapsto\sum a_i\otimes(m_i\otimes u)\in A\underset{R}{\otimes}(M\underset{S}{\otimes}U)。$$

所以，元素 $a_i\otimes(m_i\otimes u)$ 是由 $\sum a_i\otimes m_i$ 和 u 唯一确定的，与 $\sum a_i\otimes m_i$ 的代表元先取无关。故

$$(A\underset{R}{\otimes}M)\times U\ni(\sum a_i\otimes m_i, u)\mapsto\sum a_i\otimes(m_i\otimes u)\in A\underset{R}{\otimes}(M\underset{S}{\otimes}U)$$

是 S-张量映射。由推论 8.1.2，ρ 是 $\mathbb{Z}$－模同态。相似地，在定理 8.1.3 的证明内映射的逆方向上存在一个对应的同态 σ。因此，我们有

$$\sigma\rho=1_{(A\otimes M)\otimes U},\ \rho\sigma=1_{A\otimes(M\otimes U)}。$$

所以，ρ 与 σ 是同构，从而有 $(A\underset{R}{\otimes}M)\underset{S}{\otimes}U\cong A\underset{R}{\otimes}(M\underset{S}{\otimes}U)$。

由定理 8.1.3，若不考虑同构，则在多个模的张量积中可略去括号。

定理 8.1.4 设有模 A_S 与 ${}_SU$ 分别满足 $A=\underset{i\in I}{\otimes}A_i$ 与 $U=\underset{j\in J}{\otimes}U_j$。令 M_{ij} 表示 $A\underset{S}{\otimes}U$ 的由元素 $a_i\otimes u_j(a_i\in A_i, u_j\in U_j)$ 生成的 $\mathbb{Z}$－模，则有

(1) $A\underset{S}{\otimes}U=\underset{\substack{i\in I\\ j\in J}}{\oplus}M_{ij}$，其中 $M_{ij}\cong A_i\underset{S}{\otimes}U_j$；

(2) $(\underset{i\in I}{\otimes}A_i)\otimes(\underset{j\in J}{\otimes}U_j)\cong\underset{\substack{i\in I\\ j\in J}}{\oplus}(A_i\underset{S}{\otimes}U_j)$。

证明：

(2) 是 (1) 的直接推论，所以，只需证明 (1)。由 M_{ij} 的定义，有 $A\underset{S}{\otimes}U=\sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}}M_{ij}$。令 $l_i: A_i\to A$ 与 $l'_j: U_j\to U$ 为包含映射。再令 $\pi_i: A\to A_i$ 与 $\pi'_j: U\to U_j$ 是关于直和的投

影映射，则

$$1_{A_i\otimes U_j}=\pi_i l_i\otimes\pi'_j l_j'=(\pi_i\otimes\pi_j')\otimes(l_i\otimes l_j')。$$

因此，$l_i\otimes l_j'$是满足 $\mathrm{Im}(l_i\otimes l_j')\rightarrow M_{ij}$的单态射。由 M_{ij}和 $l_i\otimes l_j'$的定义，有 $\mathrm{Im}(l_i\otimes l'_j)=M_{ij}$。即，$l_i\otimes l'_j$ 诱导出 $A_i\underset{S}{\otimes}U_j(a_i\in A_i,\ u_j\in U_j)$与 M_{ij}之间的同构 ω_{ij}。这就意味着，不必区别元素 $a_i\otimes u_j\in A_i\underset{S}{\otimes}U(a_i\in A_i,\ u_j\in U_j)$与 $a_i\otimes u_j\in A_i\otimes U_j$。

由于 ω_{ij}是一个同构，故 $\pi_i\otimes\pi'_j|_{M_{ij}}$也是一个同构。因此，有

$$\omega_{ij}(\pi_i\otimes\pi'_j)|_{M_{ij}}=1_{M_{ij}},$$

所以，$\omega_{ij}(\pi_i\otimes\pi'_j)$是 $A\underset{S}{\otimes}U$ 到 M_{ij}上的投影映射，从而得 $A\underset{S}{\otimes}U=\bigoplus M_{ij}$。

现在讨论自由模的张量积，令 A_S 是具有基底$\{x_l\mid l\in L\}$的自由右 S－模。因此，成立 $A=\bigoplus_{l\in L}x_lS$。

命题 8.1.1　$A\otimes U$ 的每个元素为有限和的形式

$$\sum x_l\otimes u_l,\quad u_l\in U。$$

式中，$u_l\neq 0$ 且是唯一确定的。

证明：

由定理 8.1.4，$x_lS\cong S$、$x_lS\underset{S}{\otimes}U\cong S\underset{S}{\otimes}U\cong U$ 及由张量积的运算法则，$A\underset{S}{\otimes}U$中的每个元素可以写成有限和的形式 $\sum x_l\otimes u_l$。余下的是要证其表示具有唯一性。

设 $a=\sum x_ls_l(s_l\in S)$ 是 $a\in A$ 由基$\{x_l|l\in L\}$ 给出的表示形式，令 $k\in L$ 是固定的，

$$(a,\ u)\mapsto\begin{cases}s_ku, & \text{若 } s_k \text{ 出现在 } a \text{ 的表示中}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

显然是 $A\times U$ 到 U 的 S-张量映射。因此，$A\underset{S}{\otimes}U$ 到 U 的$\mathbb{Z}$－模同态如下：

$$\sum x_l\otimes u_l\mapsto\begin{cases}u_k, & \text{若 } x_k \text{ 在 } \sum x_l\times u_l \text{ 中出现}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

由于同态的像是唯一确定的，故 $u_k\neq 0$ 的唯一性得证。

若 A 和 U 是同一域上的 m 维和 n 维向量空间，则张量积是这个域上的 mn 维向量空间。更一般地，有如下命题。

命题 8.1.2　令 S 是交换环，A_S 是具有基底$\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m\}$的自由 S－模，${}_SU$ 是具有基底$\{z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_m\}$的自由 S－模，则 $A\underset{S}{\otimes}U$ 是具有基$\{x_i\otimes z_j\mid i=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ j=1,\ 2,\ \cdots\ n\}$的自由 S－模。

证明留给读者作为习题。

设 T 也是一个环，X_S，${}_SU_T$ 及 Y_T 为模。若把 $\mathrm{Hom}_T(U,\ Y)$中的同态作用在 U 的元素的左边，即令$\mu(u)$是 $u\in U$ 在$\mu\in\mathrm{Hom}_T(U,\ Y)$下的像，定义：

$$(\mu s)(u)=\mu(su),\quad u\in U,\ s\in S,\ \mu\in\mathrm{Hom}_T(U,\ Y),$$

则 $\mathrm{Hom}_T(U, Y)$ 构成了一个右 S－模。在这个意义下，$\mathrm{Hom}_T(U, Y)$ 可看作是出现在 $\mathrm{Hom}_S(X, \mathrm{Hom}_T(U, Y))$ 内的右 S－模。进一步地，对于 ${}_SU_T$，$X\underset{S}{\otimes}U$ 是出现在 $\mathrm{Hom}_T(X\underset{S}{\otimes}U, Y)$ 内的右 T－模。

现在，假设已有从 $\mathrm{Hom}_T(X\underset{S}{\otimes}U, T)$ 到 $\mathrm{Hom}_S(X, \mathrm{Hom}_T(X, Y))$（作为加群）的同态 $\varphi_{(X,U,Y)}$。于是，对每个 $\rho\in\mathrm{Hom}_T(X\otimes U, Y)$，一定能具体地给出像 $\rho^*\in\mathrm{Hom}_S(X, \mathrm{Hom}_T(U, Y))$。对 $x\in X$，有 $\rho^*(x)\in\mathrm{Hom}_T(U, Y)$。$\rho^*(x)$ 作用在 $u\in U$ 上可以写成形式 $\rho^*(x)(u)$。现在定义

$$\rho^*(x)(u)=\rho(xu),\ x\in X,\ u\in U,\ x\otimes u\in X\otimes U,\ \rho\in\mathrm{Hom}_T(X\otimes U, Y)。$$

利用这个方法，对每个 $x\in X$ 和 $u\in U$，ρ^* 是唯一确定的。如果现在考虑 $x_1, x_2\in X$；$u_1, u_2\in U$；$s_1, s_2\in S$；$t_1, t_2\in T$。

$$\begin{aligned}\rho^*(x_1s_1+x_2s_2)(u_1t_1+u_2t_2)&=\rho((x_1s_1+x_2s_2)\otimes(u_1t_1+u_2t_2))\\&=\rho(x_1\otimes s_1u_1)t_1+\rho(x_1\otimes s_1u_2)t_2+\\&\quad\rho(x_2\otimes s_2u_1)t_1+\rho(x_2\otimes s_2u_2)t_2\\&=\rho^*(x_1)(s_1u_1)t_1+\rho^*(x_1)(s_1u_2)t_2+\\&\quad\rho^*(x_2)(s_2u_1)t_1+\rho^*(x_2)(s_2u_2)t_2\end{aligned}$$

因此，$\rho^*\in\mathrm{Hom}_S(X_S, \mathrm{Hom}_T(U, Y))$。今令 $\rho_1, \rho_2\in\mathrm{Hom}_T(X\underset{S}{\otimes}U, Y)$，则有

$$\begin{aligned}(\rho_1+\rho_2)^*(x)(u)&=(\rho_1+\rho_2)(x\otimes u)\\&=\rho_1(x\otimes u)+\rho_2(x\otimes u)\\&=\rho_1^*(x)(u)+\rho_2^*(x)(u)。\end{aligned}$$

因此，$(\rho_1+\rho_2)^*=\rho_1^*+\rho_2^*$。所以，若令

$$\varphi_{(X,U,Y)}:\ \mathrm{Hom}_T(X\underset{S}{\otimes}U, Y)\ni\rho\mapsto\rho^*\in\mathrm{Hom}_S(X, \mathrm{Hom}_T(U, Y))$$

$$\rho^*(x)(u)=\rho(x\otimes u),\ x\in X,\ u\in U。$$

则 $\varphi_{(X,U,Y)}$ 是加群同态。

定理 8.1.5

（1）对每个三元组 $(X_S, {}_SU_T, Y_T)$，则有同构

$$\varphi_{(X,U,Y)}:\ \mathrm{Hom}(X\underset{S}{\otimes}U, Y)\cong\mathrm{Hom}_S(X, \mathrm{Hom}_T(U, Y))。$$

（2）令 $\zeta: X'_S\to X_S$，$\mu: {}_SU'_T\to{}_SU_T$，$\eta: Y_T\to Y'_T$，则图 8.1 是交换的。

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Hom}_T(X\otimes U, Y) & \xrightarrow{\varphi_{(X,U,Y)}} & \mathrm{Hom}_S(X, \mathrm{Hom}_T(U, Y))\\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(\zeta\otimes\mu,\ \eta)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}(\zeta,\ \mathrm{Hom}(\mu,\ \eta))}\\ \mathrm{Hom}_T(X'\otimes U', Y') & \xrightarrow{\varphi_{(X',U',Y')}} & \mathrm{Hom}_S(X', \mathrm{Hom}_T(U', Y'))\end{array}$$

图 8.1

证明：

(1)置 $\varphi=\varphi_{(X,U,Y)}$，则 φ 是单同态。因为 $\rho^*=0$，故 $\rho^*(x)(u)=\rho(x\otimes u)=0$ 对所有的 $x\in X$ 与 $u\in U$ 成立。因此，$\rho=0$。令 $\sigma\in \mathrm{Hom}_S(X,\ \mathrm{Hom}_T(U,\ Y))$，考虑张量映射

$$X\times U\ni(x,\ u)\mapsto\sigma(x)(u)\in Y,$$

则存在 T - 同态 ρ：$X\underset{S}{\otimes}U\ni\sum x_i\otimes u_i\mapsto\sum\sigma(x_i)(u_i)\in Y$。对这个 ρ，有 $\rho^*(x)(u)=\rho(x\otimes u)=\sigma(x)(u)$。亦即 $\varphi(\rho)=\sigma$。因此，φ 也是一个满同态，从而 φ 是同构。

(2)对 $\rho\in\mathrm{Hom}_T(X\underset{S}{\otimes}U,\ Y)$，由左边从上到下，

$$\rho\mapsto\mathrm{Hom}(\zeta\otimes\mu,\ \eta)(\rho)=\eta\rho(\zeta\otimes\mu)\mapsto(\eta\rho(\zeta\otimes\mu))^*。$$

类似地，从右边

$$\rho\mapsto\rho^*\mapsto\mathrm{Hom}(\zeta,\ \mathrm{Hom}(\mu,\ \eta))(\rho^*)=\mathrm{Hom}(\mu,\ \eta)\rho^*\zeta。$$

如果先把映射作用在 $x'\in X'$ 上，然后再作用到 $u'\in U'$ 上，则有

$$(\eta\rho(\zeta\otimes\mu))^*(x')(u')=[\eta\rho(\zeta\otimes\mu)](x'\otimes u')=\eta\rho(\zeta x'\otimes\mu u')。$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{Hom}(\mu,\ n)\rho^*\zeta)(x')(u')&=\mathrm{Hom}(\mu,\ \eta)\rho^*(\zeta x')(u')\\&=\eta\rho^*(\zeta x')(\mu u')\\&=\eta\rho^*(\zeta x'\otimes\mu u')。\end{aligned}$$

因此，图 8.1 是交换的，从而定理得证。

习题 8.1

1. 设有交换环 S 和 S - 模 A 与 U，证明：$A\underset{S}{\otimes}U\cong U\underset{S}{\otimes}A$。

2. 设 S 是任一环，并且有 S - 模 $B_S\hookrightarrow A_S$，${}_SV\hookrightarrow{}_SU$，用 $L(B,\ V)$ 记 $A\otimes U$ 的由形如 $a\otimes v$，$b\otimes u$（$a\in A$，$b\in B$，$v\in V$，$u\in U$）的元素生成的子群，证明：$(A/B)\underset{S}{\otimes}(U/V)\cong(A\underset{S}{\otimes}U)/L(B,\ V)$。

3. (1)令 B 和 V 分别为环 S 的右理想与左理想，用 $B+V$ 记 S 的由 B 和 V 生成的加法子群，证明：$(S/B)\underset{S}{\otimes}(S/V)\cong S/(B+V)$。

(2)找环 S 使有理想 $B_S\neq S$，${}_SV\neq S$ 且 $(S/B)\underset{S}{\otimes}(S/V)=0$。

4. (1)对理想 B_S，${}_SV\hookrightarrow S$，证明：$B\underset{S}{\otimes}(S/V)\cong B/BV$，其中 BV 表示 S 的由形如 bv（$b\in B$，$v\in V$）的元素生成的加法子群。

(2)找环 S 使有理想 $B_S\neq0$，${}_SV\neq S$，但 $B\underset{S}{\otimes}(S/V)=0$。

5. (1)令 l_B 与 l_V 分别是理想 B_S 与 ${}_SV$ 在环 S 中的包含映射，证明：$\mathrm{Im}(l_B\otimes l_V)\cong BV$。

(2)找一个环 S 使 $B\underset{S}{\otimes}V\neq0$ 但 $\mathrm{Im}(l_B\otimes l_V)=0$。

6. 令$\mathbb{Q}$是有理数加群，证明：$\mathbb{Q}\underset{\mathbb{Z}}{\otimes}\mathbb{Q}\cong\mathbb{Q}$。

8.2 平 坦 模

令 $A\hookrightarrow R$ 是环 R 的两边理想，l：$A\to R$ 是包含映射，考虑映射：

$$l\otimes1:A\underset{R}{\otimes}R/A\longrightarrow R\underset{R}{\otimes}R/A,$$

式中，$1=1_{R/A}$。

命题 8.2.1 在上面的假设下，有

(1)$l\otimes1=0$；

(2)$A\underset{R}{\otimes}R/A\cong A/A^2$，因此，若 $A\neq A^2$，则 $A\underset{R}{\otimes}R/A\neq0$。

证明：

(1)对 $a\in A$，$\bar{r}\in R/A$，有

$$(l\otimes1)(a\otimes\bar{r})=a\otimes\bar{r}=1\cdot a\otimes\bar{r}=1\otimes\overline{ar}=1\otimes\bar{0}=0。$$

因此，$l\otimes1=0$。

(2)设 $\hat{a}=a+A^2\in A/A^2$，$a\in A$，由于映射

$$A\times R/A\ni(a,\bar{r})\mapsto\widehat{ar}\in A/A^2$$

是 R-张量的并且是满的，故存在一个满同态 λ：$A\underset{R}{\otimes}R/A\to A/A^2$ 使得 $\lambda(a\otimes\bar{r})=\widehat{ar}$。令

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\otimes\bar{r}_i=\sum_{i=1}^{n}a_ir_i\otimes\bar{1}=(\sum_{i=1}^{n}a_ir_i)\otimes\bar{1}\in\mathrm{Ker}(\lambda)。$$

于是，$\sum_{i=1}^{n}a_ir_i\in A^2$。因此，$\sum_{i=1}^{n}a_ir_i=\sum_{j=1}^{k}a'_ja''_j$，其中 a'_j，$a''_j\in A$。所以，有

$$(\sum_{i=1}^{n}a_ir_i)\otimes\bar{1}=(\sum_{j=1}^{k}a'_ja''_j)\otimes\bar{1}=\sum_{j=1}^{k}(a'_ja''_j\otimes\bar{1})=\sum_{j=1}^{k}a'_j\otimes\bar{a''_j}=\sum_{j=1}^{k}a_j\otimes\bar{0},$$

即 λ 也是单同态，因而实际上是一个同构。所以，在 $A^2\neq A$ 的情形下，l：$A\to R$ 是一个单同态，但 $l\otimes1$ 不是单同态。

另一方面，存在模$_RM$ 使得对每个单同态 α：$A_R\to B_R$，映射

$$\alpha\otimes1_M:A\underset{R}{\otimes}M\to B\underset{R}{\otimes}M$$

也是单同态。就像下面要证明的，所有投射模 M 均满足这些性质。这类模在诸多方面都是很有趣的。

定义 8.2.1　R－模$_RM$ 叫作平坦的，若对每个单同态

$$\alpha:\ A_R \to B_R,$$

映射 $\alpha \otimes 1_M$ 也是单同态。

推论 8.2.1　平坦模的同构像也是平坦的。

证明：

令$_RM$ 是平坦的，$\varphi: {}_RM \to {}_RN$ 是一个模同构，则有交换图图 8.2。

$$\begin{array}{ccc} A\otimes M & \xrightarrow{\alpha\otimes 1_M} & B\otimes N \\ \Big\downarrow {\scriptstyle 1_A\otimes\varphi} & & \Big\downarrow {\scriptstyle 1_B\otimes\varphi} \\ A\otimes N & \xrightarrow{\alpha\otimes 1_M} & B\otimes N \end{array}$$

图 8.2

由于 $1_A\otimes\varphi$ 和 $1_B\otimes\varphi$ 是同构，故 $\alpha\otimes 1_N$ 是单同态 $\Leftrightarrow$ $\alpha\otimes 1_M$ 是单同态。

定理 8.2.1　令$_RM = \bigsqcup_{i\in I} M_i$（或$_RM = \bigoplus_{i\in I} M_i$），则有：$M$ 是平坦的$\Leftrightarrow \forall i\in I$，$M_i$ 是平坦的。

证明：

由推论 8.2.1，只需考虑 $M = \bigsqcup_{i\in I} M_i$，其元素记为$(m_i)$。图 8.3 是交换的。

$$\begin{array}{ccc} A\underset{R}{\otimes}\left(\bigsqcup_{i\in I} M_i\right) & \xrightarrow{\alpha\otimes 1_M} & B\underset{R}{\otimes}\left(\bigsqcup_{i\in I} M_i\right) \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ \bigsqcup_{i\in I}\left(A\underset{R}{\otimes} M_i\right) & \xrightarrow{\bigsqcup \alpha\otimes 1_{M_i}} & \bigsqcup_{i\in I}\left(B\underset{R}{\otimes} M_i\right) \end{array}$$

图 8.3

令垂直方向的映射是定理 8.1.3 中定义的同构（例如，左同构 $a\otimes(m_i)\mapsto(a\otimes m_i)$），则 $\alpha\otimes 1_M$ 是单同态 $\Leftrightarrow$ $(\alpha\otimes 1_{M_i})$是单同态 $\Leftrightarrow$ 每个 M_i 是平坦的。于是，定理的结论得证。

定理 8.2.2　每个投射模都是平坦的。

证明：

由于每个投射模同构于一个自由模的直和项，故由推论 8.2.1 和定理 8.2.1，只要证明结论对$_RR$ 成立就行了。在交换图图 8.4 中，$\alpha\otimes 1_R$ 是单同态 $\Leftrightarrow$ α 是单同态。

$$\begin{array}{ccc} A\otimes R & \xrightarrow{\alpha\otimes 1_R} & B\otimes R \\ \Big\downarrow \cong & & \Big\downarrow \cong \\ A & \xrightarrow{\alpha} & B \end{array}$$

图 8.4

下面讨论这样的问题：具有何种性质的环 R 使得其上的每个 R－模是平坦的。

引理 8.2.1 设有 R－模 B_R 和$_RM$，

(1)若 $0=\sum b_i\otimes m_i\in B\otimes M$，则存在有限生成子模 $B_0\hookrightarrow B$ 与 $M_0\hookrightarrow M(b_i\in B_0$，$m_i\in M_0)$使得 $0=\sum b_i\otimes m_i\in B_0\underset{R}{\otimes}M_0$。

(2)设 $B_1\hookrightarrow B$，$M_1\hookrightarrow M$，$0=\sum b_i\otimes m_i\in B_1\otimes M_1$，则 $0=\sum b_i\otimes m_i\in B\underset{R}{\otimes}M$。

证明：

(1)首先取 $\sum b_i\otimes m_i$ 内的 b_i 和 m_i 分别作为 B_0 和 M_0 的生成元。为使 $\sum b_i\otimes m_i=0\in B_0\otimes M_0$，还需要其他元素分别作为 B_0 和 M_0 的生成元。在上节定义 8.1.1 的意义下，$\sum b_i\otimes m_i=0\in B\otimes M$ 表示 $\sum(b_i,\ m_i)\in K=K(B,\ M)$，其中 $K=K(B,\ M)$依赖于 B 和 M。于是，$\sum(b_i,\ m_i)$可表示为 K 的生成元的$\mathbb{Z}$－线性组合(在 8.1.1 定义的意义下)。在这个表示中，仅有有限多个第一分量取自于 B 和仅有有多个第二分量取自于 M。令这些元素分别为 B_0 和 M_0 的生成元，则有 $\sum(b_i,\ m_i)\in K(B_0,\ M_0)$。因此，$0=\sum b_i\otimes m_i\in B_0\otimes M_0$。

(2)令 l_{B_1}：$B\to B_1$ 与 l_{M_1}：$M_1\to M$ 为包含映射，则有 $0=(l_{B_1}\otimes l_{M_1})(0)=(l_{B_1}\otimes l_{M_1})(\sum b_i\otimes m_i)=\sum b_i\otimes m_i\in B\otimes M$。

推论 8.2.2 设$_RM$ 是一个模且使它的每个有限生成子模包含在一个平坦子模内，则 M 是平坦的。

证明：

令 α：$A_R\to B_R$ 是单同态，设 $\sum a_i\otimes m_i\in \mathrm{Ker}(\alpha\otimes 1_M)$。由引理 8.2.1(1)，存在有限生成子模 $M_0\hookrightarrow M$ 使得 $\sum a_i\otimes m_i\in A\underset{R}{\otimes}M_0$ 和 $\sum a_i\otimes m_i\in \mathrm{Ker}(\alpha\otimes 1_{M_0})$。令 $M_0\hookrightarrow M_1\hookrightarrow M$，且 M_1 是平坦的，则由引理 8.2.1(2)，$\sum a_i\otimes b_i\in \mathrm{Ker}(\alpha\otimes l_{M_1})$。由于 M_1 是平坦的，则一定有 $\sum a_i\otimes m_i=0\in A\underset{R}{\otimes}M_1$。由引理 8.2.1(2)，$\sum a_i\otimes m_i=0\in A\underset{R}{\otimes}M$。所以，$M$ 是平坦的。

推论 8.2.3 若对一个同态 α：$A_R\to B_R$ 和一个模$_RM$，

$$\alpha\otimes 1_M:\ A\underset{R}{\otimes}M\longrightarrow B\underset{R}{\otimes}M$$

不是单同态，则存在有限生成子模 $A_0\hookrightarrow M$ 使得$(\alpha|_{A_0})\otimes 1_M$ 也不是单同态。

证明：

由假设，存在元素 $0\neq\sum a_i\otimes m_i\in \mathrm{Ker}(\alpha\otimes 1_M)$。令 A_0 是 A 的出现在

$\sum a_i \otimes m_i$ 中的 a_i 生成的子模，则由引理8.2.1(2)，有

$$0 \neq \sum a_i \otimes m_i \in A_0 \underset{R}{\otimes} M。$$

于是，$((\alpha|_{A_0})\otimes 1_M)(\sum a_i \otimes m_i) = \sum \alpha(a_i) \otimes m_i = 0 \in B \underset{R}{\otimes} M$。

为验证模$_RM$是否为平坦的，根据推论8.2.3，只需验证这样的单同态 $\alpha: A \to B$，其中 A 是有限生成的模即可。现在的问题是，是否进一步限制"检验单同态" $\alpha: A \to B$ 的类。首先回到内射模和贝尔判定准则的情形上。

令 $D = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$，其中$\mathbb{Q}$为有理数加群，$\mathbb{Z}$ 为整数加群，X 为$\mathbb{Z}$-模，定义 $X^\circ = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, D)$，则 X°是一个$\mathbb{Z}$-模。若 X 为左 R-模$_RM$，令

$$(\varphi r)(m) = \varphi(rm)，其中 \varphi \in M^\circ，r \in R，m \in M$$

则 M°构成右 R-模，从而可看作$\mathbb{Z}$-R-双模。对任意的同态 $\mu: {}_RM \to {}_RN$，则 $\mu^\circ = \mathrm{Hom}(\mu, 1_D): N^\circ \to M^\circ$是右 R-同态。

同时，可将 $D = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 看作$\mathbb{Z}$-模，有以下命题。

命题8.2.2 关于 $D = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$，下列叙述成立：

(1) $D = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 是内射$\mathbb{Z}$-模；

(2) 若对任$\mathbb{Z}$-模 M，令 $\mathrm{Ker}(M, D) = \bigcap_{\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,D)} \mathrm{Ker}(\varphi)$，则 $\mathrm{Ker}(M, D) = 0$。

证明：

(1) 由于$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 是可除加群，因此 $D = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 是内射的。

(2) 任取 $m \in M$，令 $\alpha: \mathbb{Z} \ni r \mapsto mr \in m\mathbb{Z} \subseteq M$，则 α 是满$\mathbb{Z}$-同态。于是 M 的子模 $m\mathbb{Z}$ 与$\mathbb{Z}/\mathrm{Ker}(\alpha)$同构。又因为 $\mathrm{Ker}(\alpha)$一定形如 $n\mathbb{Z}$，故每个单$\mathbb{Z}$-模同构于形如$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 的模($n \in \mathbb{Z}$)。对每个 $n \neq 0$，

$$\beta: \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \ni \bar{z} \mapsto \frac{z}{n} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

是单同态。由于 $M_1 = m\mathbb{Z}$ 是有限生成的，所以由定理1.2.1的推论，M_1 有极大子模 A。因此，$E = M_1/A$ 是单模。从而，存在 $n \in \mathbb{Z}$ 使$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 是单$\mathbb{Z}$-模且 E 与$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 同构。设 γ 为此$\mathbb{Z}$-模同构。若令 $l: M_1 \hookrightarrow M$ 为包含映射，$f: M_1 = m\mathbb{Z} \to E$ 为自然满同态，则有合成同态 $\beta\gamma f: M_1 \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$。由于$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 是内射的，故存在同态 $\varphi: M \to Q/Z$ 使图8.5交换。

$$\begin{array}{ccc} M_1 = \mathbb{Z}m & \xrightarrow{\ l\ } & M \\ {\scriptstyle \beta\gamma f}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle \varphi} & \\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & & \end{array}$$

图8.5

于是，$\varphi(m)=\beta\gamma f(m)\neq 0$。所以，$\mathrm{Ker}(M,\ D)=0$。

命题 8.2.3 对同态 α：$A\to B$，下列是等价的：

(1) $\alpha\otimes 1_M$ 是同态；

(2) $\mathrm{Hom}(\alpha\otimes 1_M,\ 1_D)$：$(B\otimes M)^{\circ}\longrightarrow(A\otimes M)^{\circ}$是一个满同态；

(3) $\mathrm{Hom}(\alpha,\ \mathrm{Hom}(1_M,\ 1_D))=\mathrm{Hom}(\alpha,\ 1_{M_0})$：$\mathrm{Hom}(B,\ M^{\circ})\to \mathrm{Hom}_R(A,\ M^{\circ})$是满同态。

证明：

"(1) ⇒ (2)"：若 $\alpha\otimes 1_M$ 是单同态。任 $f\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A\otimes M,\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$，由于$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 是内射的，则存在同态 φ：$B\otimes M\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 使图8.6 交换，即有 $f=\varphi(\alpha\otimes 1_M)$。于是 $\mathrm{Hom}(\alpha\otimes 1_M,\ 1_D)$是满的。

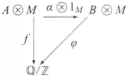


图 8.6

"(2) ⇒ (1)"：由命题 8.2.2，$\bigcap_{f\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A\otimes M,D)}\mathrm{Ker}(f)=0$ 是满的，故

$$0=\bigcap_{f\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A\otimes M,D)}=\mathrm{Ker}(f)=\bigcap_{f'\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A\otimes M,D)}\mathrm{Ker}(f'(\alpha\otimes 1_M))$$

$$=\bigcap_{f'\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A\otimes M,D)}(\alpha\otimes 1_M)^{-1}[\mathrm{Ker}(f')]\hookleftarrow(\alpha\otimes 1_M)^{-1}(0)=\mathrm{Ker}(\alpha\otimes 1_M)\hookleftarrow 0$$

故 $\mathrm{Ker}(\alpha\otimes 1_M)=0$。所以，$\alpha\otimes 1_M$ 是单的，从而(1)⇔(2)。

由定理 8.1.5(2)知，(2)⇔(3)。

定理 8.2.3 对模$_RM$，下列叙述是等价的：

(1) $_RM$ 是平坦的；

(2) 对每个有限生成右理想 $A\hookrightarrow R_R$，及包含映射 l_A：$A_R\Rightarrow R_R$，则 $l_A\otimes 1_M$ 是单同态；

(3) $M_R{}^{\circ}=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\ D)$是内射的。

证明：

在命题 8.2.3 中，若对于每个但同态 α，(1)、(2)、(3)是等价的，则(1)蕴涵着$_RM$ 是平坦的，(3)蕴涵着 M_R°是内射的，即(1)与(3)等价。由定理 3.7.1，M_R°是内射的 ⇔ 对所有的包含映射 l_A：$A_R\to B_R$，(3)成立。所以，若再回到命题 8.2.3 中的(1)，则 M_R°是内射的 ⇔ 对每个 $A_R\hookrightarrow R_R$，$l_A\otimes 1_M$ 是单同态。最后，根据本节的三个推论，可以局限到有限生成右理想 $A_R\hookrightarrow R_R$ 上。所以，我们有"(3)⇔(2)"。

对于哪些环，它上面的模是平坦的？现在解决这个问题。若每个模是投射的或内

射的，则所在的环一定是半单的。由于每个投射模是平坦的，因此，半单环一定包含在下面定理所刻画的那些环里。

定理 8.2.4 对于环 R，下列条件是等价的：

(1) 每个模 ${}_R M$ 是平坦的；

(2) 对每个元素 $r\in R$，存在一个元素 $r'\in R$ 使得 $rr'r=r$；

(3) R 的每个循环右理想是 R_R 的直和项；

(4) R 的每个有限生成右理想是 R_R 的直和项。

证明：

"(1) $\Rightarrow$ (2)"：对任 $r\in R$，考虑包含映射 l：$rR\to R$，则由假设，

$$l\otimes 1_{R/Rr}:\ rR\underset{R}{\otimes}(R/Rr)\to R\underset{R}{\otimes}(R/Rr)$$

是单同态。由于 $(l\otimes 1_{R/Rr})(r\otimes\bar{1})=r\otimes\bar{1}=1\otimes r\bar{1}=1\otimes\bar{0}=0$。故 $0=r\otimes\bar{r}\in rR\underset{R}{\otimes}(R/Rr)$。记 $\bar{y}=y+Rr\in R/Rr$，令 $\widehat{rz}=rz+rRr\in rR/rRr$，则显然有

$$rR\times R/Rr\ni(rx,\ \bar{y})\mapsto\widehat{rxy}\in rR/rRr$$

是一个 R - 张量映射。所以

$$\tau: rR\underset{R}{\otimes}(R/Rr)\ni\sum rx_i\otimes\overline{y_i}\mapsto\widehat{rx_iy_i}\in rR/rRr$$

是一个同态（加群的，甚至是一个同构）。由于 $0=r\otimes\bar{1}\in rR\underset{R}{\otimes}(R/Rr)$。因此，$r\in rRr$，即存在 $r'\in R$ 使得 $rr'r=r$。

"(2) $\Rightarrow$ (3)"：由 $rr'r=r$ 得 $(rr')(rr')=(rr'r)r'=rr'$。因此 $e=rr'$ 是一个幂等元。所以 $R_R=eR\otimes(1-e)R$。进一步地，有 $eR=rr'R\hookrightarrow rR$。另一方面，由于 $er=rr'r=r$，故有 $rR\hookrightarrow eR$。因此，$rR=eR$。

"(3) $\Rightarrow$ (4)"：用数学归纳法对生成元的个数证明每个有限生成右理想是由一个幂等元生成的。归纳开始，由(3)知成立，因为如果 $R_R=rR\otimes A$，则 $1=e_1+e_2$，$e_1\in rR$，$e_2\in A$，故 e_1 与 e_2 是正交幂等元，且 $rR=e_1R$，$A=e_2R$（引理 5.2.1）。令令 $B=r_1R+\cdots+r_nR\hookrightarrow R_R$。由归纳假设，存在一个幂等元 $e\in R$ 使得 $eR=r_1R+\cdots+r_{n-1}R$。因此，由于 $r_n=er_n+(1-e)r_n$，我们有 $r_nR\hookrightarrow er_nR+(1-e)r_nR$，所以，$B=eR+r_nR=eR+(1-e)r_nR$。

如同归纳开始所证明的，存在幂等元 $f\in R$ 使 $fR=(1-e)r_nR$。所以，$eR+r_nR=eR+fR$ 成立。由于 $f\in(1-e)r_nR$，故 $ef=0$。断言 $g=e+f(1-e)$ 是幂等元，且 $gR=eR+fR=r_1R+\cdots+r_nR$。首先，有 $gR\hookrightarrow eR+fR$。进一步，有 $geR=eR\hookrightarrow gR$，及 $gfR=(ef+f^2+fef)R=f^2R\hookrightarrow gR$（因为 $ef=0$ 与 $f^2=f$），因此，$gR=eR+fR$。最后

$$\begin{aligned}g^2&=[e+f(1-e)][e+f(1-e)]=e+f(1-e)f(1-e)\\&=e+f^2-f^2e=e+f(1-e)=g,\end{aligned}$$

即 g 是个幂等元。于是，$R_R = gR \oplus (1-g)R$。从而(4)得证。

"(4) ⇒ (1)"：由定理 8.2.3，只需证明，对每个包含映射 l_A：$A_R \hookrightarrow R_R$，其中 A_R 是 R_R 的有限生成右理想，和任一个模 ${}_RM$，映射 $l_A \otimes 1_M$ 是单同态即可。

由于 A 是 R_R 内的直和项，故存在幂等元 g 使 $A = gR$。令

$$\begin{aligned}\sum a_i \otimes m_i &= \sum ga_i \otimes m_i = \sum g^2 a_i \otimes m_i \\ &= \sum a \otimes ga_i m_i = g \otimes (\sum ga_i m_i) \in \operatorname{Ker}(l_A \otimes 1_M)\end{aligned}$$

因此，$g \otimes \sum a_i m_i = 1 \otimes \sum ga_i m_i = 0 \in R \underset{R}{\otimes} M$，于是由命题 8.1.1，$\sum ga_i m_i = 0$。因此，$\sum a_i \otimes m_i = g \otimes (\sum ga_i m_i) = g \otimes 0 = 0$。所以，$l_A \otimes 1_M$ 是单同态。于是(1)得证。

注： 显然，对于边来说，定理 8.2.4 的(2)是对称的，所以，也有对应于左边的等价条件。

定义 8.2.2 满足定理 8.2.4 中条件的环 R 叫做正则环。

于是，每个半单环是正则的。然而，反之则不一定成立。下面给出一个正则环不是半单环的例子。

为构造这样的例子，设 K 是 一个 正则环(例如域)，令

$$R = \prod_{i \in I} K_i,\ K_i = K,\ i = 1, 2, \cdots.$$

利用分量方式定义加法。类似地，可定义乘法 $(k_i) \cdot (k_i') = (k_i k_i')$。则 R 构成了一个环。这个环是正则的。亦即，令 $k_i k_i' k_i = k_i$，则有 $(k_i)(k_i')(k_i) = (k_i)$，如果 K 为域，则选取

$$k'_i = \begin{cases} k_i^{-1} & k_i \neq 0 \\ 0 & k_i = 0 \end{cases}.$$

易证 $A = \coprod_{i \in I}^{\infty} K_i$ 中的双边理想，且在 ${}_RR$ 和 R_R 中均是大的。因此，A 不是 R_R(或 ${}_RR$)的直和项，所以 R 不是半单的。$(R/A)_R$ 和 ${}_R(R/A)$ 均不是投射的。否则，$R \to R/A$ 将分裂。由于每个 R-模是平坦的，故 $(R/A)_R$ 是平坦的但不是投射的。

最后，研究在什么条件下，平坦模的商模也是平坦的。

引理 8.2.2 令 ${}_RM$ 是平坦的，$U \hookrightarrow {}_RM$，$A \hookrightarrow R_R$，l：$A \to R$ 表示包含映射，则下列是等价的：

(1) $l \otimes 1_{M/U}$；$A \underset{R}{\otimes} (M/U) \longrightarrow R \underset{R}{\otimes} (M/U)$ 是单同态；

(2) $U \cap AM = AU$。

证明：

"(1) ⇒ (2)"：令 $u = \sum a_i m_i \in U \cap AM$，则对 $t = \sum a_i \otimes \overline{m_i} \in A \underset{R}{\otimes} (M/U)$，有 $(l$

$\otimes 1_{M/U})(t) = \sum a_i \otimes \overline{m_i} = 1 \otimes \sum a_i \overline{m_i} = 1 \otimes \sum \overline{u} = 0 \in R \underset{R}{\otimes} (M/U)$。因此，由假设得 $t = 0$。对应

$$A \times (M/U) \ni (a, \overline{m}) \mapsto a\hat{m}: am + AU \in AM/AU$$

显然是 R－张量映射。由此诱导出一个同态

$$\lambda: A \underset{R}{\otimes} (M/U) \longrightarrow AM/AU,$$

由 $t = 0$ 得，$0 = \lambda(0) = \lambda(t) = \sum a_i \hat{m}_i = \hat{u}$。因此，$u \in AU$。

"(2) ⇒ (1)"：令 $t = \sum a_i \otimes \overline{m_i} \in A \underset{R}{\otimes} (M/U)$，且

$$(l \otimes 1_{M/U})(t) = \sum a_i \otimes \overline{m_i} = 1 \otimes \sum \overline{a_i m_i} = 0。$$

因此，$\sum a_i \otimes m_i - \sum a_j' \otimes u_j \in \mathrm{Ker}(l \otimes 1_M)$。由于 M 是平坦的，故有 $\mathrm{Ker}(l \otimes 1_M) = 0$。这就蕴含着 $\sum a_i \otimes m_i = \sum a_j' \otimes u_j$。因此，对 $\gamma: M \to M/U$：

$$\begin{aligned} t &= (l_A \otimes \gamma)(\sum a_i \otimes m_i) \\ &= \sum a_i \otimes \overline{m_i} \\ &= (l_A \otimes \gamma)(A_j' \otimes u_j) \\ &= \sum a_j' \otimes \overline{u_j} \\ &= 0 \in A \otimes (M/U)。\end{aligned}$$

所以，$l \otimes 1_{M/U}$ 是单的。

注：对于"(1) ⇒ (2)"，没有用到 ${}_R M$ 是平坦模的假设，仅对"(2) ⇒ (1)"用到。

定理 8.2.5 令 ${}_R M$ 是平坦的，$U \hookrightarrow {}_R M$，则下列是等价的：

(1) M/U 是平坦的；

(2) $U \cap AM = AU$ 对每个有限生成理想 $A \hookrightarrow R_R$ 成立。

证明：

由引理 8.2.2 和定理 8.2.3 即得证。

定理 8.2.6 令 ${}_R P$ 是投射的，$U \hookrightarrow \mathrm{Rad}(P)$，如果 P/U 是平坦的，则 $U = 0$。

证明：

(1) 首先对自由模 ${}_R F$ 证明定理中的结论。令 $\{x_i \mid i \in I\}$ 是 F 的基，令 $u \in U$，其表示为 $u = \sum a_i x_i$，$(a_i \in R)$。用 $A = \sum a_i R$ 表示 u 的系数 a_i 生成的右理想，由定义，这是有限生成的。由引理 8.2.2，有 $U \cap AF = AU$。因此，$u = \sum b_j u_j$，$b_j \in A$，$u_j \in U$。由假设，有 $U \hookrightarrow \mathrm{Rad}(F) = \mathrm{Rad}(R)F$。所以，由于 $\mathrm{Rad}(R)$ 是两边理想，故在表示 $u_j = \sum c_{jk} x_k$ 中，所有的 $c_{jk} \in \mathrm{Rad}(R)$。于是

$$u = \sum_i a_i x_i = \sum_j \sum_k b_j c_{jk} x_k。$$

比较系数，得 $a_i = \sum_j b_j c_{ji} \in A\text{Rad}(R)$ 。

由于对 A 的所有生成元，这个关系成立。于是，$A \hookrightarrow A\text{Rad}(A)$。因此 $A = A\text{Rad}(R)$。由 7.2 的几个定理，一定有 $A=0$。从而也有 $u=0$。由于 $u \in U$ 是任意的，故 $U=0$。因此，结论对自由模成立。

(2)今设 P 是自由模 F 的直和项，故 $F = P \oplus P_1$。令 $U \hookrightarrow \text{Rad}(P)$，且 P/U 是平坦的，令 v：$F \to F/U$ 为自然满同态，则

$$F/U = v(F) = v(P) + v(P_1)。$$

由于 $U \hookrightarrow P$，我们进一步有

$$v(P) + v(P_1) = v(P) \oplus v(P_1)。$$

又 $v(P) = (P+U)/U = P/U$，$v(P_1) = (P_1+U)/U = P_1/P_1 \cap U \cong P_1$，因此，$F/U \cong (P/U) \otimes P_1$。

由假设，P/U 是平坦的。由定理 8.2.2，P_1 是平坦的。于是由推论 8.2.1 和定理 8.2.1，F/U 是平坦的。由于 $U \hookrightarrow \text{Rad}(P) \hookrightarrow \text{Rad}(F)$，故 $U=0$。于是，对任意一个投射模，由定理 8.2.1 知，本定理的结论成立。

由于 0 - 模是平坦的，作为直接推论。那么得到定理 7.6.2 中的结论。

推论 8.2.4 令 ${}_RP$ 是投射模，且 $\text{Rad}(P) = P$，则 $P=0$。

习题 8.2

1. (1)令 ${}_RM$ 是自由模，基为 $\{e_i \mid i \in I\}$。证明：对 $U \hookrightarrow M$，下列叙述是等价的：

①M/U 是平坦的；

②$u \in U \Rightarrow u \in A_u U$，其中 A_u 是 u 关于基 $\{e_i \mid i \in I\}$ 的系数生成的右理想。

③$u \in U \Rightarrow$ 存在 φ：$M \Rightarrow U$ 使 $\varphi(u) = u$。

④$u_1, \cdots, u_n \in U \Rightarrow$ 存在 φ：$M \to U$ 使成立 $\varphi(u_i) = u_i$，$(i = 1, 2, \cdots, n)$。

(2)证明：对投射模 ${}_RM$，上面的①、③、④是等价的。

2. 令 R 是一个交换环，${}_RM$ 是半单模，证明：

(1)如果 ${}_RM$ 是内射的，则它是平坦的；

(2)如果 ${}_RM$ 是平坦的，且它仅有有限多个齐次分支，则它是内射的。

第9章 范 畴

范畴是从数学的各个领域中概括出来的一种高度抽象的数学系统。数学的各个领域都有各自的研究对象。例如，集合论研究集合与映射；群论研究群与群的同态；拓扑学研究拓扑空间与连续映射，等等。在20世纪中期，数学家们认为有必要将各个领域中的研究对象都各自合在一起成为一个总体，使之各自总体都是一种数学系统。这就是范畴思想。于是，所有的集合与映射组成集合的范畴。所有的群与群同态组成群范畴，所有的拓扑空间与连续映射组成拓扑空间的范畴，等等。因此，在范畴与范畴之间往往存在着内在的联系与变换。例如，任意一个群 G 都可以通过变换手续而变成一个交换群。以 $C(G)$ 表示 G 的换位子群，则 $G/C(G)$ 是一个交换群。因此，交换化手续就把群范畴变成了交换群的范畴。这种内在的联系与变换提供了所谓函子的概念。

本书将在第9章介绍一般范畴和函子的基本知识，并讨论环上的模与模同态构成的模范畴的基本性质。

9.1 范畴的定义

定义 9.1.1 范畴是一些对象(记为 A，B，C，…)构成的类 $\mathscr{C}$ 且满足如下条件：

(1)对应于 $\mathscr{C}$ 中每对对象 A，B，存在一个集合，记为 $\mathrm{Hom}(A, B)$，这些集合是互不相交的，同时，$\mathrm{Hom}(A, B)$ 中的元称为是从 A 到 B 的态射，记为 $f: A\to B$。而且，A 叫作 f 的定义域，B 叫作 f 的变区。

(2)对应于类 C 中任三个对象 A，B，C，存在一个函数：

$$\mathrm{Hom}(B, C)\times\mathrm{Hom}(A, B)\to\mathrm{Hom}(A, C),$$

$$(g, f)\to g\circ f;$$

其中，$g\circ f$: $A\to C$ 称为 f: $A\to B$ 与 g: $B\to C$ 的合成，并且服从如下两个定律：

①结合律。如果 f: $A\to B$ 与 g: $B\to C$ 及 h: $C\to D$ 是 $\mathscr{C}$ 中的态射，则：$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$。

②恒等律：对 $\mathscr{C}$ 中每个对象 B，存在态射 1_B：$B\to B$ 使得对任态射 f：$A\to B$ 及 g：$B\to C$ 成立 $1_B\circ f=f$ 与 $g\circ 1_B=g$。

定义 9.1.2 在范畴 $\mathscr{C}$ 中，一个态射 f：$A\to B$ 称为是一个等价，如果存在 $\mathscr{C}$ 中一个态射 g：$B\to A$ 使得 $g\circ f=1_A$ 与 $f\circ g=1_B$。这时称 A 与 B 是等价的，有时也称 A 与 B 是同构的，f 叫作同构态射或单位态射。

显然，两个等价的态射 f 与 g 的合成，如果 $f\circ g$ 有意义的话，仍是一个等价。范畴例子如下：

1. 令 $\mathscr{S}$ 是集合构成的类，对任 A，$B\in\mathscr{S}$，$\mathrm{Hom}(A, B)$ 是集合 A 到集合 B 的映射全体，则易见 $\mathscr{S}$ 是一个范畴，这时，f 是等价 $\Leftrightarrow f$ 是双射。

2. 令 $\mathscr{G}$ 是全体群，$\mathrm{Hom}(A, B)$ 是群同态 f：$A\to B$ 的集合，则 $\mathscr{G}$ 是一个范畴，这里态射 f：$A\to B$ 是一个等价 $\Leftrightarrow f$ 是群同构。所有阿贝尔群的范畴 $\mathscr{G}$ 可类似定义。

3. 令 $\mathscr{M}$ 为环 R 上右模全体，$\mathrm{Hom}(M, N)$ 为 R－模同态 φ：$M\to N$ 全体，则 μ 构成一个范畴，称为 R－模范畴。

4. 令 $\mathscr{P}$ 是偏序集 $(S, \leqslant)$ 构成的类，态射 f：$(S, \leqslant)\to(T, \leqslant)$ 为映射 f：$S\to T$ 使得对任 x，$y\in S$ 且 $x\leqslant y$ 时，$f(x)\leqslant f(y)$ 成立。

5. 设 Ω 为一个集合，其元素之间存在一种可传与自反的关系 R，即若 aRb，且 bRc，则 aRc，而且对任 $a\in\omega$，均有 aRa，这种集合称为拟序集。现在以 Ω 的元素为对象作成一个范畴 $\mathscr{C}$，使当 aRb 时，规定 $\mathrm{Hom}(a, b)$ 为一个单元集合，即只含有一个元素，其唯一的元素是符号 φ_{ab}。如果 a 与 b 无此关系，即当 $\overline{aRb}$ 时，定义 $\mathrm{Hom}(a, b)$ 为空集。逐条验证可知 $\mathscr{C}$ 是一个范畴。注意，这里的态射不是映射，更不是同态。

定义 9.1.3 令 $\mathscr{C}$ 是一个范畴，$\{A_i\mid i\in I\}$ 是 $\mathscr{C}$ 的一族对象，则对象族 $\{A_i\mid i\in I\}$ 的积是 $\mathscr{C}$ 中一个对象 P 及一族态射 $\{\pi_i$：$P\to A_i$，$|i\in I\}$ 使得对任意对象 B 与态射族 $\{\varphi_i$：$B\to A_i\mid i\in I\}$，存在唯一的态射 φ：$B\to P$ 使得 $\pi_i\circ\varphi=\varphi_i(\forall i\in I)$。$\{A_i\mid i\in I\}$ 的积 P 通常记为 $\prod\limits_{i\in I}A_i$。有时，用交换图描述积是很有帮助的，把 $I=\{1, 2\}$ 时的积以交换图形式描述如下：$\{A_1, A_2\}$ 的积是 $A_1\xleftarrow{\pi_1}P\xrightarrow{\pi_2}A_2$ 使得对任意其他形式的 $A_1\xleftarrow{\varphi_1}B\xrightarrow{\varphi_2}A_2$，存在唯一的态射 φ：$B\to P$ 使图 9.1 是交换的。

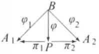


图 9.1

定理 9.1.1 如果 $(P, \{\pi_i\})$ 和 $(Q, \{\psi_i\})$ 均是范畴 $\mathscr{C}$ 中同一对象类 $\{A_i\mid i\in I\}$ 的积，则 P 与 Q 是等价的。

证明：

由于 P 与 Q 均是积，存在态射 f：$P \to Q$ 与 g：$Q \to P$ 使得对每个 $i \in I$，图 9.2、9.3 交换。

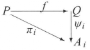


图 9.2

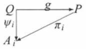


图 9.3

对每个 $i \in I$，通过 f 与 g 的合成得到下面的交换图，如图 9.4 所示。

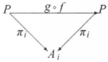


图 9.4

因此，$g \circ f$：$P \to P$ 是一个态射且使得 $\pi_i \circ (g \circ f) = \pi_i$（对任 $i \in I$）。但根据积的定义，存在唯一的态射具有这个性质。由于映射 1_P：$P \to P$ 对所有 $i \in I$ 使成立 $\pi_i \circ 1_P = \pi_i$。由唯一性，有 $g \circ f = 1_P$。同样地，利用 Q 是积可证得 $f \circ g = 1_Q$。因此，f：$P \to Q$ 是一个等价。

定义 9.1.4 范畴 $\mathscr{C}$ 中，一族对象 $\{A_i \mid i \in I\}$ 的上积是 $\mathscr{C}$ 中的一个对象 $\mathscr{S}$ 和一族态射 $\{l_i: A_i \to S \mid i \in I\}$。使得对任意对象 B 和一族态射 $\{\psi_i: A_i \to B \mid i \in I\}$，存在唯一态射 ψ：$S \to B$ 使 $\psi \circ l_i = \psi_i$（对所有 $i \in I$）成立。

通常 $\{A_i \mid i \in I\}$ 的上积记为 $\coprod_{i \in I} A_i$。类似地可证下定理。

定理 9.1.2 如果（$\mathscr{S}$，$\{l_i\}$）与（$\mathscr{S}'$，$\{\lambda_i\}$）是范畴 $\mathscr{C}$ 中一族对象 $\{A_i \mid i \in I\}$ 的两个上积，则 $\mathscr{S}$ 与 $\mathscr{S}'$ 是等价的。

习题 9.1

1. 设 $\mathscr{C}$ 的对象是所有正整数，m，n 是两个正整数，令

$$C(m, n) = \begin{cases} \varphi, & m > n \\ \text{所有整数环上 } m \times n \text{ 矩阵}, & m \leqslant n; \end{cases}$$

态射的合成是通常矩阵的乘法，证明 $\mathscr{C}$ 是一个范畴。

2. 设 A 是范畴 $\mathscr{C}$ 的一个对象，证明：$\mathscr{C}(A, A)$ 是一个有单位元的半群，进一步证明 $\mathscr{C}(A, A)$ 中所有单位态射构成的群。

3. 证明：在整环范畴 $\mathscr{C}$ 中包含映射 j：$\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ 是既单且满的态射，但不是单位态

射，这里$\mathbb{Z}$是整数环，$\mathbb{Q}$是有理数域。

4. 设S是一个非空集合，令$\mathscr{C}_S$的对象类为$\{a \mid a\in S\}$，而$\mathscr{C}_S$中任两个对象a与b的态射集为$\mathscr{C}_S(a, b)=\begin{cases}\{1_a\}, & a=b\\ \varphi, & a\neq b\end{cases}$。证明$\mathscr{C}_S$是一个范畴。

9.2 逆范畴与对偶原则

设$\mathscr{C}$为一个范畴，A，B，C，…为其对象，$\mathscr{C}(A, B)$为其态射集，我们利用$\mathscr{C}$做一个新的范畴$\mathscr{C}^0$。

取$\mathscr{C}^0$的对象仍为A，B，C，…，但为区别起见，同一个A作为A在$\mathscr{C}^0$的对象时改写成A^0。又取态射集$\mathscr{C}^0(A^0, B^0)=\mathscr{C}(B, A)$，同样，$\sigma\in\mathscr{C}(B, A)$在作为$\mathscr{C}^0(A^0, B^0)$中元素时，改写为$\sigma^0$。因此，同一个$\sigma$，在$\mathscr{C}$中，它的定义域是$B$，变区是$A$；而在$\mathscr{C}^0$中，它的定义域却是$A^0=A$，变区是$B^0=B$。当$\sigma^0\in\mathscr{C}^0(A^0, B^0)$，$\tau^0\in\mathscr{C}^0(B^0, C^0)$时，因$\sigma\in\mathscr{C}(B, A)$，$\tau\in\mathscr{C}(C, B)$，故$\sigma\tau\in\mathscr{C}(C, A)=\mathscr{C}^0(A^0, C^0)$。所以，定义$\tau^0\sigma^0=\tau\sigma=(\sigma\tau)^0\in\mathscr{C}^0(A^0, C^0)$。一般地，定义$\sigma_1^0\sigma_2^0\cdots\sigma_n^0=\sigma_n\sigma_{n-1}\cdots\sigma_1$。容易验证，$\mathscr{C}^0$是一个范畴，称之为范畴$\mathscr{C}$的逆范畴。显然$\mathscr{C}^{00}=\mathscr{C}$。

逆范畴所起的作用在于它提供了极其重要的对偶原则。

假定$\mathscr{S}$是一句对任何范畴都有意义的陈述语，比如说明一个概念，提出一个命题，肯定一条规律等。将$\mathscr{S}$引用于范畴$\mathscr{C}$与$\mathscr{C}^0$上，就得到两句有关$\mathscr{C}$与$\mathscr{C}^0$的陈述语$\mathscr{S}(\mathscr{C})$与$\mathscr{S}(\mathscr{C}^0)$。最后，将$\mathscr{S}(\mathscr{C}^0)$翻译成一句有关$\mathscr{C}$的陈述语，即，$\mathscr{S}(\mathscr{C}^0)$中$\mathscr{C}^0$的对象都换成$\mathscr{C}$的相应对象，$\mathscr{C}^0$的态射都改成$\mathscr{C}$的态射，这样得到的陈述语$\mathscr{S}^0(\mathscr{C})$就是$\mathscr{S}(\mathscr{C})$的对偶陈述语。若$\mathscr{S}(\mathscr{C})$说明一个概念，则$\mathscr{S}^0(\mathscr{C})$说明其对偶概念；若$\mathscr{S}(\mathscr{C})$是一个命题，则$\mathscr{S}^0(\mathscr{C})$是对偶命题；如果$\mathscr{S}$是一条对$\mathscr{C}$与$\mathscr{C}^0$都已证明的定理，则$\mathscr{S}^0(\mathscr{C})$也是一条定理，无须再证，因为$\mathscr{S}(\mathscr{C}^0)$与$\mathscr{S}^0(\mathscr{C})$是等价的，这就是对偶原则。由于有对偶原则，一个概念就变成两个概念，一条定理就变成了两条定理。

下面定义的始对象与终对象是一对最简单的对偶概念。

定义 9.2.1 若对任何对象A，$\mathscr{C}(I, A)$一定是单元集（即仅含有一个元的集合），则叫作始对象；若对任何对象A，$\mathscr{C}(A, T)$一定是单元集，则叫作终对象；若Z既是始对象又是终对象，则Z称为零对象。

例如定义 9.1.2. 的例 1 中的集合范畴$\mathscr{S}$没有始对象，任一个单元集均是终对象。

我们现在解释一下，始对象与终对象是相互对偶的概念。

以$\mathscr{S}(\mathscr{C})$表示定义9.2.1的前半句，即始对象的定义：若对任何对象A，$\mathscr{C}(I, A)$一定是单元集，则I叫作$\mathscr{C}$的一个始对象。那么，$\mathscr{S}(\mathscr{C}^0)$就是$\mathscr{C}^0$中的始对象的定义：若对任何对象$A^0$，$\mathscr{C}^0(T^0, A^0)=\mathscr{C}(A, T)$，所以把$\mathscr{S}(\mathscr{C}^0)$翻译成有关$\mathscr{C}$的陈述语，就得到$\mathscr{S}^0(\mathscr{C})$：若对任何对象$A$，$\mathscr{C}(A, T)$总是单元集，则$T$为终对象。

类似地，9.1中定义的积与上积也是相互对偶的概念，在9.1节中，证明了积与上积在同构意义下是唯一的。类似地，也可证明始对象与终对象在同构意义下是唯一的。事实上，若I与I'均为始对象，则$\mathscr{C}(I, I')$与$\mathscr{C}(I', I)$都是单元集，其态射的合成均是恒等态射ε_I与ε_I'，故I与I'是等价的(即同构的)。这个命题是对任何范畴都成立的，故它对$\mathscr{C}^0$也是正确的，但$\mathscr{C}^0$中的始对象就是$\mathscr{C}$的终对象。所以这个命题的对偶命题“范畴$\mathscr{C}$若有终对象，在同构意义下只能有一个终对象”也必然是正确的，无须再证明。显然，有以下定义：

定义9.2.2 若范畴$\mathscr{C}$有零对象，则在同构意义下是唯一的。设Z是任意一个零对象，0_{AZ}与0_{ZB}为$\mathscr{C}(A, Z)$与$\mathscr{C}(Z, B)$中唯一的元素，则乘积$0_{ZB}0_{AZ}$不随零对象的选取而改变。

通常以0_{AB}来表示乘积$0_{ZB}0_{AZ}$，这里Z是任一零对象，这个0_{AB}叫作$\mathscr{C}(A, B)$中的零态射。

9.3 态射、核与上核

态射在范畴中起着关键作用，它不同于集合间的映射，所以，在本节讨论一下态射及其相关的问题。

定义9.3.1 令$\mathscr{C}$是一个范畴，α：$A \to B$是$\mathscr{C}$中一个态射。则定义如下：

(1)α是单态射:$\Leftrightarrow \forall \mathscr{C} \in \mathscr{C}$及$\forall r_1$，$r_2 \in \mathscr{C}(C, A)$，若$\alpha r_1=\alpha r_2$，则必有$r_1=r_2$。

(2)α是满态射:$\Leftrightarrow \forall \mathscr{C} \in \mathscr{C}$及$\forall \beta_1$，$\beta_2 \in \mathscr{C}(B, C)$。若$\beta_1\alpha=\beta_2\alpha$则必有$\beta_1=\beta_2$。

(3)α是双态射:$\Leftrightarrow$ α既是单态射又是满态射。

(4)α是同构(或叫等价):$\Leftrightarrow$存在$\beta \in \mathscr{C}(B, A)$使得$\alpha\beta=1_B$且$\beta\alpha=1_A$。

(5)α是自同态:$\Leftrightarrow$ α的定义域A与α的变区B相同，即$A=B$。

(6)α是自同构:$\Leftrightarrow$ α是同构而且是自同态。

命题9.3.1 如果α：$A \to B$是同构，则α是双态射。

证明：令$\beta\alpha=1_A$且$\alpha\beta=1_B$。如果$\alpha\gamma_1=\alpha\gamma_2$，则$\gamma_1=1_A\gamma_1=\beta\alpha\gamma_1=\beta\alpha\gamma_2=1_A\gamma_2=\gamma_2$，

即 α 是单态射。类似地，如果 $\beta_1\alpha=\beta_2\alpha$，则 $\beta_1=\beta_1 1_B=\beta_1\alpha\beta=\beta_2\alpha\beta=\beta_2 1_B=\beta_2$。即 β 是满态射。所以，α 是双态射。

定理 9.3.1

(1)若 fg 是满态射，则 f 是满态射。

(2)若 gf 是单态射，则 f 是单态射。

证明：

(1)设有 $h_1f=h_2f$，则 $h_1fg=h_2fg$。因 fg 是满态射，故 $h_1=h_2$，从而 f 是满态射。

(2)设有 $fh_1=fh_2$，则 $gfh_1=gfh_2$，因 gf 是单态射，故 $h_1=h_2$，从而 f 是单态射。

定理 9.3.2 同构态射是既单的且满的。

证明：

若 σ 是同构态射，则存在 τ 使 $\sigma\tau$ 与 $\tau\sigma$ 均是恒等映射，而恒等映射当然既是单的且满的，故由定理 9.3.1，σ 是既单的且满的。

核与上核是范畴理论中另一对非常重要的对偶概念。

定义 9.3.2 设 $\mathscr{C}$ 是具有零对象的范畴(当然它有零态射)，令 $\alpha\in\mathscr{C}(A, B)$，则称一个态射 u：$K\to A$ 为 α 的核，如果 $\alpha u=0$，且若对每个态射 u'：$K'\to A$ 使得 $\alpha u'=0$，则存在唯一的态射 γ：$K'\to K$ 使 $u\gamma=u'$。通常即为 $\mathrm{Ker}(\alpha)=(u, K)$。

注：

(1)如果 u：$K\to A$ 是 α：$A\to B$ 的核，则 u 是单态射。

事实上，若 $g_1, g_2\in\mathscr{C}(D, K)$ 使 $ug_1=ug_2$，由于 $\alpha u=0$，故 $\alpha ug_1=\alpha ug_2$。由于 $ug_1=ug_2\in\mathscr{C}(D, A)$，故存在唯一的态射 γ：$D\to K$ 使 $ug_1=ug_2=u\tau$。因此得 $g_1=g_2=\tau$。从而 u 是单态射。

(2)若(k, u)是 $\alpha\in\mathscr{C}(A, B)$的核，则对任何同构态射 φ：$K'\to K$，$(K', \eta\varphi)$也是 α 的核。

定理 9.3.3 若态射 $\alpha\in\mathscr{C}(A, B)$有核，它在本质上是唯一的。

证明：

若 η：$K\to A$ 与 γ：$D\to A$ 均是 α：$A\to B$ 的核，则因为 $\alpha\gamma=0$，必有唯一的$\tau\in\mathscr{C}(D, K)$使 $\eta\tau=\gamma$，又从 $\alpha\eta=0$，必有唯一的 $\sigma\in\mathscr{C}(K, D)$使得 $\gamma\sigma=\eta$。于是，$\eta\tau\sigma=\gamma\sigma=\eta=\eta\varepsilon_K$，这里 ε_K 是 K 的恒等态射。又由于 η 是单态射，故 $\tau\sigma=\varepsilon_K$。同理，$\sigma\tau=\varepsilon_D$，这里 ε_D 是 D 的恒等态射。所以，τ 与 σ 都是同构映射，从而 K 与 D 同构。因此，$(K, \eta)=\mathrm{Ker}(\alpha)$。实际上是指一些同构于 K 的对象连同相应的单态射所组成的等价类。

态射的上核是其核的对偶概念，为方便读者，叙述如下：

定义 9.3.3 设范畴 $\mathscr{C}$ 有零对象，当然，它就有零态射，则 $\alpha\in\mathscr{C}(A, B)$的上核是一个态射 $\pi\in\mathscr{C}(B, W)$，如果 π 满足：

(1) $\pi\alpha=0$，

(2) 对于任何 $\sigma\in\mathscr{C}(B,\ C)$ 使 $\sigma\alpha=0$，则必存在唯一的 $\tau\in\mathscr{C}(W,\ C)$ 使 $\tau\pi=\sigma$。通常 α 的核记为 $\mathrm{CoKer}(\alpha)=(W,\ \pi)$ 或 $\mathrm{CoKer}(\alpha)=\pi$。

注：(1) α 的上核 π 是满态射。

(2) 对任何同构态射 φ：$W\to W'$，则 $\varphi\pi$ 仍是 α 的上核。

定理 9.3.4 设范畴 $\mathscr{C}$ 有零对象，从而有零态射，则单态射的核是 $(0,\ 0)$，前一个0是指零对象，后一个0是指零态射；而满态射的上核是 $(0,\ 0)$。

证明：设 $\alpha\in\mathscr{C}(A,\ B)$ 为态射，$\mathrm{Ker}(\alpha)=(K,\ \eta)$，则因 $\alpha\eta=0=\alpha0_{KA}$，故 $\eta=0_{KA}$。又因为 η 必须是单态射，所以 0_{KA} 是单态射。如果 $K\neq0$，$\mathscr{C}(K,\ K)$ 中至少有两个态射，一个是 ε_K，另一个是 0_{KK}，它们不能相等。但 $0_{KA}\varepsilon_K=0_{KA}0_{KK}$，这与 0_{KA} 是单态射矛盾。故 $K=0$。

推论 9.3.1 零态射的核与上核均是同构态射。

事实上，0_{AB} 的核显然是 ε_A，若 $\sigma\in\mathscr{C}(C,\ A)$ 也是 0_{AB} 的核，则必有 $\tau\in\mathscr{C}(A,\ C)$ 使 $\sigma\tau=\varepsilon_A$ 与 $\tau\sigma=\varepsilon_C$，故 σ 是同构态射。"上核"可类似地证明。

定理 9.3.5 设范畴 $\mathscr{C}$ 有零对象，$(A,\ \pi_\lambda)=\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$，则对每一个 $\omega\in\lambda$，有唯一的 $f_\omega\in\mathscr{C}(A_\omega,\ A)$，使 $\begin{cases}\pi_\lambda f_\lambda=\varepsilon_{A_\lambda} & \omega=\lambda\\ \pi_{\lambda}f_\omega=0, & \omega\neq\lambda\end{cases}$。

其对偶定理为定理 9.3.6。

定理 9.3.6 设范畴 $\mathscr{C}$ 有零对象，$(B,\ \eta_\lambda)=\coprod\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$，则对每一个 $\omega\in\lambda$，有唯一的 $g_\omega\in c(B,\ A_\omega)$ 使 $\begin{cases}g_\lambda\eta_\lambda=\varepsilon_{A_\lambda}, & \omega=\lambda\\ g_\omega\eta_\lambda=0, & \omega\neq\lambda\end{cases}$。

证明：

利用积与上积的定义即可得证。

习题 9.3

1. 对于群范畴 $\mathscr{G}$，证明单态射与单同态是等价概念，满态射与满同态是等价概念。

2. 在范畴 $\mathscr{C}$ 中，f 是从对象 A 到对象 B 的态射，证明 $(k,\ \eta)$ 是 f 的核当且仅当

(1) $f\eta=0$；

(2) 对于任何 D 与 $g\in\mathrm{Hom}(D,\ A)$，只要 $fg=0$，就必存在唯一的 $\tau\in\mathrm{Hom}(D,\ K)$ 使 $\eta\tau=g$。

3. 在范畴 $\mathscr{C}$ 中，f 是从对象 A 到对象 B 的态射。证明 $(W,\ \pi)$ 是 f 的上核当且仅当

(1) $\pi f=0$，

(2) 对任对象 C 与任 $g\in \mathrm{Hom}(B,C)$，只要 $gf=0$ 就必存在唯一的 $\tau\in \mathrm{Hom}(W,C)$，使 $\tau\pi=g$。

9.4 加法范畴与阿贝尔范畴

定理 9.4.1 具有零对象的范畴 $\mathscr{C}$ 称为加法范畴，它满足如下三条公理：

(1) A_1：对任何两个对象 A 与 B，$\mathscr{C}(A,B)$ 总是一个加法交换群，而零态射 0_{AB} 是这个群的零元素。

(2) A_2：双边分配律成立，即，如果 $\sigma,\sigma'\in\mathscr{C}(A,B)$，$\tau,\tau'\in\mathscr{C}(B,C)$，则

$$(\tau+\tau')\sigma=\tau\sigma+\tau'\sigma,$$

$$\tau(\sigma+\sigma')=\tau\sigma+\tau\sigma'。$$

(3) A_3：任何有限个对象 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 必有上积 $\bigsqcup_{i\in I}A_i$。

注：

(1) 并不是每一个范畴都是加法范畴。例如集合范畴 $\mathscr{S}$，对任两个集合 A 与 B，$\mathscr{S}(A,B)$ 不是一个加法交换群。

(2) 在加法范畴 $\mathscr{C}$ 中，τ 与 σ 均为态射，且乘积有意义，则

$$\tau(-\sigma)=-\tau\sigma=(-\tau)\sigma,$$

$$(-\tau)(-\sigma)=\tau\sigma。$$

事实上，由 $\tau 0=0$ 与 $0\tau=0$ 知

$$0=\tau 0=\tau[\sigma+(-\tau)]=\tau\sigma+\tau(-\tau);$$

$$0=0\sigma=[\tau+(-\tau)]\sigma=\tau\sigma+(-\tau)\sigma;$$

$$0=0(-\sigma)=[\tau+(-\tau)](-\sigma)=-\tau\sigma+(-\tau)(-\sigma)。$$

从而等式成立。

定理 9.4.2 在加法范畴 $\mathscr{C}$ 中，对象 B 与 n 个态射 $\eta_\lambda\in\mathscr{C}(A_\lambda,B)$ 是 $\{A_\lambda\}$ 的上积，$\lambda=1,2,\cdots,n$，其充要条件是有唯一的 $\pi_\lambda\in\mathscr{C}(B,A_\lambda)$ 使

$$\pi_\lambda\eta_\lambda=\varepsilon A_\lambda \qquad \omega=\lambda; \tag{1}$$

$$\pi_\omega\eta_\lambda=0 \qquad \omega\neq\lambda; \tag{2}$$

而且

$$\sum_{\lambda=1}^{n}\eta_\lambda\pi_\lambda=\varepsilon_B。$$

证明：

设$(B, \eta_\lambda) = \coprod_{\lambda=1}^{n} A_\lambda$，则由定理9.3.6得到定理9.4.2的(1)和(2)。于是，对$\omega = 1, 2, \cdots, n$，有

$$\left(\sum_{\lambda=1}^{n} \eta_\lambda \pi_\lambda\right)\eta_\omega = \sum_{\lambda=1}^{n} \eta_\lambda \pi_\lambda \eta_\omega = \eta_\omega \varepsilon_{A_\omega} = \eta_\omega = \varepsilon_B \eta_\omega。$$

但由交换图(如图9.5所示)知，满足方程$g\eta_\omega = \eta_\omega$的$g$是唯一的，它只能是$\varepsilon_B$，故$\sum_{\lambda=1}^{n} \eta_\lambda \pi_\lambda = \varepsilon_B$满足图9.5的$\pi_\lambda$显然是唯一的。

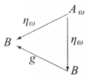


图9.5

反过来，假定B与$\eta_\lambda \in \mathscr{C}(A_\lambda, B)$有图9.5的性质。任取$C$与$\pi_\lambda \in \mathscr{C}(A_\lambda, C)$，令$g = \sum_{\omega\in 1}^{n} \tau_\omega \pi_\omega \in \mathscr{C}(B, C)$，则$g\eta_\lambda = \sum \tau_\omega \pi_\omega \eta_\lambda = \tau_\lambda \pi_\lambda \eta_\lambda = \tau_\lambda \varepsilon_{A_\lambda} = \tau_\lambda$，即图9.6是交换的。

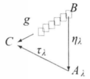


图9.6

如果又有$g'\eta_\lambda = \tau_\lambda$，则$g' = g'\varepsilon_B = g' \sum \eta_\lambda \pi\lambda = \sum_{\lambda=1}^{n} g'\eta_\lambda \pi_\lambda = \sum_{\lambda=1}^{n} \tau_\lambda \pi_\lambda = g$。所以完成交换图9.6(对所有的$\lambda$)的$g$是唯一的，故$(B, \eta_\lambda) = \coprod_{\lambda=\Lambda}^{n} A_\lambda$。

推论9.4.1 定理9.4.2中的B与$\pi_\lambda \in \mathscr{C}(B, A_\lambda)$是$\{A_\lambda\}$的积。

证明：

任取C与$\sigma_\lambda \in \mathscr{C}(C, A_\lambda)$。令$f = \sum_{\lambda=1}^{n} \eta_\lambda \sigma_\lambda \in \mathscr{C}(C, B)$，则

$$\pi_\omega f = \sum_{\lambda=1}^{n} \pi_\omega \eta_\lambda \sigma_\lambda = \varepsilon A_\omega \sigma_\omega = \sigma_\omega。$$

如果又有$\pi_\omega f' = \sigma_\omega$，则$f' = \sum \eta_\lambda \pi_\lambda f' = \sum \eta_\lambda \sigma_\lambda = f$。

推论9.4.2 在加法范畴中，任何有限个对象都有积。

推论9.4.3 加法范畴$\mathscr{C}$的逆范畴$\mathscr{C}^0$也是加法范畴。

事实上，若$(B, \pi_\lambda) = \prod_{\lambda=1}^{n} A_\lambda$，则$(B^0, \pi_\lambda^0) = \coprod_{\lambda=1}^{n} A_\lambda^0$。

注： 推论 9.4.2 表明对偶原则对于加法范畴也是适用的，即，如果一个命题对于加法范畴已经证实，其对偶命题也必然是正确的。

定理 9.4.3 在加法范畴$\mathscr{C}$中，有：

(1)态射f是单态射当且仅当$\mathrm{Ker}(f)=0$；

(2)态射f是满态射当且仅当$\mathrm{CoKer}(f)=0$。

注： 这两个命题是对偶的，只要证明其中一个成立，则另一个也成立。

证明：

必要性来自定理 9.3.4。下面证明充分性。若f不是单态射，必有$\tau_1 \neq \tau_2$使得$f\tau_1 = f\tau_2$，即$f(\tau_1 - \tau_2)=0$，但因$\mathrm{Ker}(f)=0$，故有φ使得$0\varphi = \tau_1 - \tau_2$，因$0\varphi = 0$，所以$\tau_1 = \tau_2$，矛盾。

定义 9.4.2 如果一个加法范畴是阿贝尔范畴，那么它满足下面三个条件：

(1)A_4：任何态射都有核与上核；

(2)A_5：任何单态射都是其上核(核)的核(上核)；

(3)A_6：任何态射σ都可分解成一个单态射η与一个满态射π之积，$\sigma = \eta\pi$，这个分解式叫作σ的标准分解式。

注： 阿贝尔范畴$\mathscr{C}$的逆范畴$\mathscr{C}^0$仍然是一个阿贝尔范畴。事实上，加法范畴的逆范畴仍然是加法范畴。其次，若σ是$\mathscr{C}$中的单(满)态射，则σ^0是$\mathscr{C}^0$中的满(单)态射。最后，σ的核(上核)对应于σ^0的上核(核)；当$\sigma = \eta\pi$时，$\sigma^0 = \pi^0\eta^0$。所以，对偶原则适用于阿贝尔范畴。

定义 9.4.2 中的三个条件可归纳为如下的定理：

定理 9.4.4 加法范畴$\mathscr{C}$是阿贝尔范畴当且仅当对任一个态射$\sigma \in \mathscr{C}(A, B)$都有下列的交换图，如图 9.7 所示。

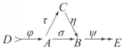


图 9.7

而且，

$$\varphi = \mathrm{Ker}(\sigma) = \mathrm{Ker}(\pi), \tag{1}$$

$$\psi = \mathrm{CoKer}(\sigma) = \mathrm{CoKer}(\eta) \tag{2}$$

$$\eta = \mathrm{Ker}(\psi), \tag{3}$$

$$\pi = \mathrm{CoKer}\ (\varphi) \tag{4}$$

注：箭向↣表示单态射，→表示满态射。

证明：

"⇒"：$\sigma=\eta\pi$ 这个等式得定义 9.4.2 的(3)。令 $\varphi=\mathrm{Ker}(\sigma)$，则因为 $\sigma\varphi=0$ 得 $\pi\varphi=0$。又若 $\pi\varphi'=0$，则 $\eta\pi\varphi'=\sigma\varphi'=0$，故有 τ，使 $\varphi\tau=\varphi'$。所以 $\varphi=\mathrm{Ker}(\pi)$。因 π 是满态射，$\varphi=\mathrm{Ker}(\pi)$，故 $\pi=\mathrm{CoKer}(\varphi)$。由于本定理的(1)、(2)、(3)、(4)中，左右等式是相互对偶的，所以无须再证有关上核部分。

"⇐"：假设对 σ 既有图 9.7 又有定理 9.4.4 最后的式子。σ 既有核 φ，又有上核 ψ，故得定义 9.4.2(1)。条件定义 9.4.2(3)直接来自(9.3.4)的交换性。

为证明定义 9.4.2(2)，先假设 σ 是满态射，由定理 9.3.4，$\psi=\mathrm{CoKer}(\sigma)$ 必是零态射，再由推论 9.3.5，$\eta=\mathrm{Ker}(\psi)$ 是单位态射。所以，当 π 是 φ 的上核时，σ 也是 φ 的上核。"单"的部分是对偶的，从而定理得证。

定理 9.4.5 在阿贝尔范畴中，既单且满的态射必然是同构映射。

证明：

若图 9.7 中的 σ 是单态射，其核 φ 必是零态射($A=0$)，而零态射的上核 π 必是同构态射。又 σ 是满态射，其上核 ψ 为零态射($E=0$)，而零态射的核 η 是同构态射，σ 既是两个同构态射之积，当然是一个同构映射。

注：对一般的加法范畴，本命题不真。例如，在交换群范畴 $\mathscr{C}$ 中，即 $\mathscr{C}$ 中的对象是交换群，态射为群同态。设 A 是由一个元 a 生成的无限循环群，B 是由一个元 b 生成的无限循环群，令 σ：$A\to B$，$\sigma(na)=2nb$，$n=0$，±1，±2，…，则 σ 是一个单态射，它也是一个满态射，但 σ 不是满同态，因为它的像并不充满群 B。事实上，若有 τ，$\tau'\in c(B,C)$ 且 $\tau\sigma=\tau'\sigma$，则 $\tau\sigma(a)=\tau(2b)=2\tau(b)=\tau'\sigma(a)=\tau'(2b)=2\tau'(b)$。因此 $\tau(b)=\tau'(b)$。即 $\tau=\tau'$。但 σ 不是同构态射。

习题 9.4

1. 证明：自由交换群范畴是加法范畴，但不是阿贝尔范畴。

2. 证明：以域 K 上线性空间为对象，以线性映射为态射构成的线性空间范畴是阿贝尔范畴。

9.5 函子与自然变换

对任何一个数学对象的研究一定要考虑这些对象的“映射”，例如，研究群时，考虑群同态；讨论模时，有模同态；在本章，考虑的数学对象是范畴。一个函子可以粗略地描述为从一个范畴到另一个范畴且保持适当结构的“映射”。而一个自然变换是从一个函子到另一个函子的“映射”。

定义 9.5.1 令 $\mathscr{C}$ 与 $\mathscr{D}$ 是范畴，从 $\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{D}$ 的共变函子 F（记为 F: $\mathscr{C}\to\mathscr{D}$）是一个具有双重意义的“映射”，一方面，$F$ 将 $\mathscr{C}$ 中每个对象 C 映射为 $\mathscr{D}$ 中的对象 $F(C)$；另一方面，F 又将 $\mathscr{C}$ 中每个态射 f: $C\to C'$ 映射为 $\mathscr{D}$ 中的映射 $F(f)$: $F(C)\to F(C')$，并且满足：

(1) 对 $\mathscr{C}$ 中每个恒等态射 1_C，成立 $F(1_C)=1_{F(C)}$。

(2) 对 $\mathscr{C}$ 中任两个态射 f 与 g，若它们的合成 $g\circ f$ 有意义，则 $F(g\circ f)=F(g)\circ F(f)$。

例子如下：

1. 共变恒等函子 $I_{\mathscr{C}}$: $\mathscr{C}\to\mathscr{C}$，$1_{\mathscr{C}}$ 将范畴 $\mathscr{C}$ 中每个对象 C 映射为 C，同时，也将 $\mathscr{C}$ 中每个态射 f: $C\to D$ 映为 f。

2. 令 R 是一个环，A 为一个固定右 R－模，对每个 R－模 C，令 $F(C)=\mathrm{Hom}_R(A,C)$。对每个 R－模，同态 f: $C\to C'$，令 $F(f)$ 是通常的诱导映射 $\bar{f}$: $\mathrm{Hom}_R(A,C)\to\mathrm{Hom}_R(A,C')$，则 F 是从右 R－模范畴到阿贝尔群范畴的一个共变函子。

3. 更一般地，令 A 是范畴 $\mathscr{C}$ 中固定的对象，定义从 $\mathscr{C}$ 到集合范畴 $\mathscr{S}$ 的共变函子 h_A 为：$\mathscr{C}$ 中的对象 C 对应 $\mathscr{S}$ 中的集合 $h_A(C)=\mathrm{Hom}(A,C)$，即为 $\mathscr{C}$ 中从 A 到 C 的所有态射的集合。如果 f: $C\to C'$ 是 $\mathscr{C}$ 中的一个态射，令 $h_A(f)$: $\mathrm{Hom}(A,C)\to\mathrm{Hom}(A,C')$ 是映射 $g\mapsto f\circ g$，$g\in\mathrm{Hom}(A,C)$，函子 h_A 叫作共变 Hom 函子。

定义 9.5.2 令 $\mathscr{C}$ 与 $\mathscr{D}$ 是范畴，从 $\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{D}$ 的逆变函子 S（记为 S: $\mathscr{C}\to\mathscr{D}$）是一个具有双重意义的映射（均记为 S），一方面，S 把 $\mathscr{C}$ 中每个对象 C 映射为 $\mathscr{D}$ 中的对象 $S(C)$；另一方面，S 把 $\mathscr{C}$ 中态射 f: $C\to C'$ 映射为 $\mathscr{D}$ 中的态射 $S(f)$: $S(C')\to S(C)$ 且满足：

(1) 对 $\mathscr{C}$ 中每个恒等态射 1_C，成立 $S(1_C)=1_{S(C)}$。

(2) 对 $\mathscr{C}$ 中任两个态射 f 与 g，若它们的合成 $g\circ f$ 有意义，则 $S(g\circ f)=S(f)\circ S(g)$。



注：显然，函子 S：$\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 是逆变的 $\Leftrightarrow$ 函子 $\bar{S}$：$\mathscr{C}^0\to\mathscr{D}$ 是共变函子。这里 $\mathscr{C}^0$ 是 $\mathscr{C}$ 的逆范畴，$\bar{S}$ 的定义为：$\bar{S}(C^0)=S(C)$，$\bar{S}(f^0)=S(f)$，其中 C^0 与 f^0 分别为 $\mathscr{C}^0$ 中的对象与态射。

例子如下：

1. 令 R 是一个环，B 是一个固定的右 R－模，我们定义从右 R－模范畴到阿贝尔群范畴上的一个逆变函子为：对每个 R－模 C，$S(C)=\mathrm{Hom}_R(C, B)$。如果 f：$C\to C'$ 是 R－模同态，则 $S(f)$ 是诱导映射 f：$\mathrm{Hom}_R(C', B)\to\mathrm{Hom}_R(C, B)$。

2. 更一般地，令 B 是范畴 $\mathscr{C}$ 中一个固定的对象，从 $\mathscr{C}$ 到集合范畴 $\mathscr{S}$ 的一个逆变函子 h^B 为：对 $\mathscr{C}$ 中每个对象 C，定义 $h^B(C)=\mathrm{Hom}_R(C, B)$，即从 C 到 B 的所有态射的集合；如果 f：$C\to C'$ 是 $\mathscr{C}$ 中一个态射，令 $h^B(f)$：$\mathrm{Hom}(C', B)\to\mathrm{Hom}(C, B)$ 为映射 $g\mapsto g\circ f(g\in\mathrm{Hom}(C', B))$。函子 h^B 叫作逆变函子。

为定义多变量函子，下面引入积范畴的概念。

如果 $\mathscr{C}$ 与 $\mathscr{D}$ 是范畴。它们的积是范畴 $\mathscr{C}\times\mathscr{D}$，其对象是 (C, D)，其中 $C\in\mathscr{C}$，$D\in\mathscr{D}$，态射为 (f, g)：$(C, D)\to(C', D')$，其中 f：$C\to C'$ 是 $\mathscr{C}$ 中的态射，g：$D\to D'$ 是 $\mathscr{D}$ 中的态射，合成为 $(f'g')\circ(fg)=(f'\circ f, g'\circ g)$。容易验证 $\mathscr{C}\times\mathscr{D}$ 满足范畴的公理。两个以上范畴的积可类似地定义。

多变量函子可定义在适当的积范畴上，这样的函子在某些变量上可以是共变的，而在其他变量上可以是逆变的。例如 $\mathscr{C}$，$\mathscr{D}$ 与 $\mathscr{E}$ 是范畴，从 $\mathscr{C}\times\mathscr{D}$ 到 $\mathscr{E}$ 的两个变量的函子 F(第一个变量是逆变的，第二个变量是共变的)为：对 $\mathscr{C}\times\mathscr{D}$ 中每个对象 (C, D)，F 将其对应为 $\mathscr{E}$ 中的态射：

$$F(f, g): F(C', D)\to F(C, D),$$

并服从如下条件：

(1) 对 $\mathscr{C}\times\mathscr{D}$ 中所有的 (C, D)，$F(1_C, 1_D)=1_{F(C,D)}$。

(2) 只要合成 $f'\circ f$ 与 $g'\circ g$ 分别在 $\mathscr{C}$ 与 $\mathscr{D}$ 中有意义，则 $F(f'\circ f, g'\circ g)=F(f, g')\circ F(f', g)$。

注：第二个条件蕴含着对 $\mathscr{C}$ 中每个固定对象 C，对象映射 $F(C, -)$ 和态射映射 $F(1_C,)$ 构成一个共变函子 $\mathscr{D}\to\mathscr{E}$。类似地，对 $\mathscr{D}$ 中每个固定的对象 D，$F(-, D)$ 和 $F(-, 1_D)$ 构成一个逆变函子 $\mathscr{C}\to\mathscr{E}$。

3. 两个变量的函子 $\mathrm{Hom}_R(-, -)$ 是右 R－模范畴 $\mathscr{M}$ 的积范畴 $\mathscr{M}\times\mathscr{M}$ 到阿贝尔范畴的函子，其中对第一个变量是逆变的而对第二个变量是共变的。

4. 令 R 是具有单位元的交换环，则函子 F：

$$F(A_1, A_2, \cdots, A_n)=A_1\otimes_R\cdots\otimes_R A_n,$$

$$F(f_1, \cdots, f_n)=f_1\otimes_R\cdots\otimes_R f_n$$

是 n 个 R－模范畴的积到 R－模范畴自身的 n 个变量共变函子。

如果 F_1：$\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 与 F_2：$\mathscr{D}\to\mathscr{E}$ 是函子，则它们的合成(记为 F_2F_1)是从 $\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{E}$ 的函子，对象映射于态射映射分别由

$$C\mapsto F_2(F_1(C)),$$
$$f\mapsto F_2(F_1(f))$$

给出。如果 F_1 与 F_2 均是共变的或者均是逆变的，则 F_2F_1 是共变的。如果 F_1 与 F_2 有一个是共变的而另一个是逆变的，则 F_2F_1 是逆变的。

定义 9.5.3 令 $\mathscr{C}$ 与 $\mathscr{D}$ 是范畴，F：$\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 与 G：$\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 是共变函子，从 F 到 G 的一个自然变换 α 是这样的映射：对 $\mathscr{C}$ 中每个对象 C，在 $\mathscr{D}$ 中都有一个态射 α_C：$F(C)\to G(C)$ 使得对 $\mathscr{C}$ 中每个态射 f：$C\to C'$，在 $\mathscr{D}$ 中图 9.8 是交换的。

$$\begin{array}{ccc}
F(C) & \xrightarrow{\alpha_C} & G(C) \\
\downarrow{\scriptstyle F(f)} & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\
F(C') & \xrightarrow{\alpha_{C'}} & G(C')
\end{array}$$

图 9.8

如果对 $\mathscr{C}$ 中每个 C，α_C 是同构态射，在 α 叫作 F 与 G 的自然同构(自然等价)。

逆变函子 S，T：$\mathscr{C}\to\mathscr{D}$ 的自然变换(同构)β：$S\to T$ 可以同样的方式定义，只是对 $\mathscr{C}$ 中每个态射 f：$C\to C'$，所需交换图如图 9.9 所示：

$$\begin{array}{ccc}
S(C) & \xrightarrow{\beta_C} & T(C) \\
\downarrow{\scriptstyle S(f)} & & \downarrow{\scriptstyle T(f)} \\
S(C') & \xrightarrow{\alpha_{C'}} & T(C')
\end{array}$$

图 9.9

注：两个自然变换的合成显然是自然变换；多变量函子的自然变换可类似地定义。

例子如下：

1. 如果 F：$\mathscr{C}\to\mathscr{C}$ 是任一个函子，则对应 $C\mapsto 1_{F(C)}$ 定义了一个自然同构 1_F：$F\to F$，称为恒等自然同构。

2. 如果 B 是具有单位元的环 R 上的右模，则有模的自然同构 α_B：$B\otimes_R R\cong B$。(见 8.1)，易证，对每个模同态 f：$B\to C$，图 9.10 是交换的。令 $\mathscr{M}$ 是右 R－模范畴，函子 F：$\mathscr{M}\to\mathscr{M}$ 由对应 $B\mapsto R\otimes_R B$，且 $f\mapsto 1_R\otimes f$ 给出。设 $I_{\mathscr{M}}$ 是 $\mathscr{M}$ 的恒等函子，于是 $B\mapsto a_B$ 就定义了一个自然同构 α：$F\to I_{\mathscr{M}}$。

$$\begin{array}{ccc}
R\otimes_R B & \xrightarrow{\alpha_B} & B \\
\downarrow{\scriptstyle 1_R\otimes f} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\
R\otimes C & \xrightarrow{\alpha_C} & C
\end{array}$$

图 9.10

定义 9.5.4　由加法范畴 $\mathscr{C}$ 到加法范畴 $\mathscr{D}$ 的函子 F 叫作加法函子，如果对于任何 f，$g \in \mathscr{C}(A, B)$，总成立 $F(f+g) = F(f) + F(g)$。换句话讲，F 是加法交换群 $\mathscr{C}(A, B)$ 到 $\mathscr{D}(\mathscr{F}(\mathscr{A}), \mathscr{F}(\mathscr{B}))$ 的一个群同态。

定理 9.5.1　设 $\mathscr{C}$ 为加法范畴，则下列叙述是等价的：

(1) X 是零对象；

(2) $(X, \varepsilon_X, \varepsilon_X) = X \bigsqcup X$；

(3) $(X, \varepsilon_X, \varepsilon_X) = X \prod X$。

注： 此处的 ε_X 是对象 X 上的恒等态射。

证明：

“(1) ⇒ (2)”与“(1) ⇒ (3)”是显然的，因为对任何 A，$\mathscr{C}(A, X)$ 与 $\mathscr{C}(X, A)$ 总是单元集合。

“(2) ⇒ (3)”：X 必是始对象，否则有 f_1 与 $f_2 \in \mathscr{C}(X, A)$，使得图 9.11 交换。

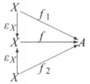


图 9.11

于是有 $f\varepsilon_X = f = f_1$，$f = f\varepsilon_X = f_2$。因此 $\mathscr{C}(X, X)$ 也是单元集合，即只含有一个元素，即 ε_X。所以满足定理 9.4.2 中三个等式的 π_1 与 π_2 只能均为 ε_X。由推论 9.4.1 知，$(X, \varepsilon_X, \varepsilon_X) = X \bigsqcup X$。

“(3) ⇒ (2)”由 $\mathscr{C}^0$ 也是加法范畴，由对偶原则，如果 $(X, \varepsilon_X, \varepsilon_X) = X \prod X$，则 $(X^0, \varepsilon_X^0, \varepsilon_X^0) = X^0 \bigsqcup X^0$，因而 $(X^0, \varepsilon_X^0, \varepsilon_X^0)$ 是 $X^0 \bigsqcup X^0$，所以 $(X, \varepsilon_X, \varepsilon_X) = X \bigsqcup X$。

“(2)，(3) ⇒ (1)”：只需注意 X 既是始对象，也是终对象，即可得证。

定理 9.5.2　若 $\mathscr{C}$ 与 $\mathscr{D}$ 均是加法范畴，F 是由 $\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{D}$ 的函子，并且 $F(A \bigsqcup B) = FA \bigsqcup FB$，则 $F0 = 0$，这里的 0 既表示零对象，又表示零态射。

证明：

设 X 为零对象，由定理 9.5.1(2)，$(X, \varepsilon_X, \varepsilon_X) = X \bigsqcup X$，于是 $(FX, \varepsilon_{FX}, \varepsilon_{FX}) = FX \bigsqcup FX$。由定理 9.5.1，$FX$ 是 $\mathscr{D}$ 中的零对象。因此，$\mathscr{D}(FA, FB)$ 中的零元素只能是 $F0_{AB}$。

定理 9.5.3　设 F 是从加法范畴 $\mathscr{C}$ 到加法范畴 $\mathscr{D}$ 的函子，则下列叙述等价：

(1)F 是加法函子;

(2)F 保持有限个对象的上积，即 $F(\coprod_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)=\coprod_{\lambda\in\Lambda}FA_\lambda$，$\Lambda$ 是有限集合;

(3)F 保持有限个对象的积，即 $F(\prod_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)=\prod_{\lambda\in\Lambda}FA_\lambda$，$\Lambda$ 是有限集合。

证明留给读者。

习题 9.5

1. 从群范畴 $\mathscr{G}$ 到集合范畴 $\mathscr{S}$ 的共变函子与逆变函子各举一例。

2. 设 R 是一个环，证明：R 的中心元与 R 上的模范畴 Mod(R) 的恒等函子到它自身的自然变换空间之间存在一个双射。

由此证明恒等函子到它自身的自然变换构成一个环，它同构于环 R 的中心。

3. 设 F 是范畴 $\mathscr{C}$ 到范畴 $\mathscr{D}$ 的共变函子或逆变函子，$f\in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ 为一个单位态射，证明 $F(f)$ 是范畴 $\mathscr{D}$ 中的一个单位态射。

9.6 模 范 畴

在本节内，考虑具有单位元 1 的环 R 上的右 R-模全体及模与模之间的同态作为态射所构成的模范畴 Mod(R)。由定理 1.5.1 知，在模范畴中，单同态与单态射是一回事，满同态与满态射也是一回事，从而同构态射与同构映射是等价的。

任取 A，$B\in \mathrm{Mod}(R)$，及任取 f_1，$f_2\in \mathrm{Hom}(A, B)$，当 $a\in A$ 时，定义

$$(f_1+f_2)(a)=f_1(a)+f_2(a),$$

于是，任 a_1，$a_2\in A$，$r\in R$，有

$$\begin{aligned}(f_1+f_2)(a_1+a_2)&=f_1(a_1+a_2)+f_2(a_1+a_2)\\&=f_1(a_1)+f_1(a_2)+f_2(a_1)+f_2(a_2)\\&=(f_1+f_2)(a_1)+(f_1+f_2)(a_2)\\(f_1+f_2)(ar)&=f_1(ar)+f_2(ar)\\&=f_1(a)r+f_2(a)r\\&=(f_1+f_2)(a)r\end{aligned}$$

所以，$f_1+f_2\in \mathrm{Hom}(A, B)$。因而 Hom($A$, B) 是一个阿贝尔群，零同态是这个群的零元素，$-f$ 为 f 的负元素，$-f$ 定义为：$(-f)(a)=-f(a)$。容易验证，双边分配律也

是成立的。由第2章，知道在 Mod(R)中，对任有限多个模 $A_i(i=1, 2, \cdots, n)$，必有上积 $\bigsqcup_{i\in I}^{n} A_i$。因此，Mod (R)是一个阿贝尔范畴。

令 f: $A\to B$ 是 Mod (R) 中一个态射(即为模同态)，则有如下交换图，如图 9.12 所示。

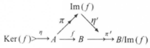


图 9.12

式中，η 与 π' 分别为包含态射(同态)与自然满态射(同态)，B 为 f 的变区，π 为 f 到 Im(f)的限制态射，即 π：$A\to \mathrm{Im}(f)$，$\pi(a)=f(a)$，$\forall a\in A$，而 η'为包含态射(同态)。于是，由定理 9.4.4，有如下定理

定理 9.6.1 Mod(R)是一个阿贝尔范畴。

在 1.9 节，给出了模的正合列概念，并在那里给出了一个三引理(即短五引理)。下面给出模范畴中的五引理。

定理 9.6.2(五引理) 在模范畴 Mod(R)中，设有下面的交换图如图 9.13 所示：

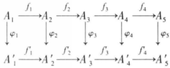


图 9.13

其中上下两行均正合，即 $\mathrm{Im}(f_i)=\mathrm{Ker}(f_{i+1})$，$\mathrm{Im}(f_i')=\mathrm{Ker}(f_{i+1}')$，$i=1, 2, 3, 4$。则有

(1)若 φ_1 为满同态，φ_2 与 φ_4 为单同态，则 φ_3 为单同态；

(2)若 φ_5 为单同态，φ_2 与 φ_4 为满同态，则 φ_3 为满同态。

特别地，若 φ_1，φ_2，φ_4，φ_5 均是同构，则 φ_3 是同构。

证明：

(1)反证法。假设 φ_3 不是单同态，必有 $0\neq a_3\in A_3$ 使得 $\varphi_3(a_3)=0$。

因 $\varphi_4 f_3=f_3'\varphi_3$，故 $\varphi_4 f_3(a_3)=f_3'\varphi_3(a_3)=f_3'(0)=0$。但 φ_4 是单同态，$f_3(a_3)=0$。即 $a_3\in \mathrm{Ker}(f_3)=\mathrm{Im}(f_2)$。因此，存在 $a_2\in A_2$ 使得 $f_2(a_2)=a_3\neq 0$。即 $a_2\notin \mathrm{Ker}(f_2)=\mathrm{Im}(f_1)$。

令 $a_2'=\varphi_2(a_2)$，则因 $\varphi_3 f_2=f_2'\varphi_2$，$f_2'\varphi_2(a_2)=\varphi_3 f_2(a_2)=\varphi_3(a_3)=0$，所以$\varphi_2(a_2)=a_2'\in \mathrm{Ker}(f_2')=\mathrm{Im}(f_1')$。因此存在 $a_1'\in A_1'$使得 $a_2'=f_1'(a_1')$。

因为 a_1 是满同态，故存在 $a_1\in A$ 使得 $\varphi_1(a_1)=a_1'$。

由于 $\varphi_2 f_1 = f_1'\varphi_1$，故 $a_2' = f_1'(a_1') = f_1'\varphi_1(a_1) = \varphi_2 f_1(a_1')$。令 $f_1'(a_1) = \overline{a_2} \in A_2$ 得 $a_2' = \varphi_2(\overline{a_2})$。已知 $a_2' = \varphi_2(a_2)$，而 φ_2 是单同态，故 $a_2 = \overline{a_2}$。但已知 $a_2 \notin \mathrm{Im}(f_1)$。而 $\overline{a_2} = f_1(a_1')$，即 $\overline{a_3} \in \mathrm{Im}(f_1)$，这就产生了矛盾。

从而 φ_3 是单的。

(2)任取 $x \in A_3'$，设 $f_3'(x) = a_4'$，由正合性知 $f_4'(a_4') = 0$。由于 φ_4 是满同态，故存在 $a_4 \in A_4$ 使得 $\varphi_4(a_4) = a_4'$。因 $\varphi_5 f_4 = f_4'\varphi_4$，得 $\varphi_5 f_4(a_4) = f'_4\varphi_4(a_4) = f_4'(a_4') = 0$。因 φ_5 是单同态，故 $f_4(a_4) = 0$。

于是，$a_4 \in \mathrm{Ker}(f_4) = \mathrm{Im}(f_3)$，所以存在 $a_3 \in A_3$ 使得 $f_3(a_3) = a_4$。令 $\varphi_3(a_3) = a'_3$。则有 $f_3'(a_3') = f_3'\varphi_3(a_3) = \varphi_4 f_3(a_3) = \varphi_4(a_4) = a_4'$。但开始已假定 $f_3'(x) = a_4'$，所以令 $y = x - a_3'$，则 $f_3'(y) = 0$，$y \in \mathrm{Ker}(f_3') = \mathrm{Im}(f_2')$。因此存在 $a_2' \in A_2'$ 使得 $f_2'(a_2') = y$。由于 φ_2 是满同态，有 $a_2 \in A_2$ 使 $\varphi_2(a_2) = a_2'$。所以 $\varphi_3 f_2(a_2) = f_2'\varphi_2(a_2) = f'_2(a'_2) = y$。令 $f_2(a_2) = \overline{a_3}$，得 $\varphi_3(\overline{a_3}) = y = x - a_3'$。

于是，$x = \varphi_3(\overline{a_3}) + a_3' = \varphi_3(\overline{a_3}) + \varphi_3(a_3) = \varphi_3(\overline{a_3} + a_3)$。因此 φ_3 是满同态。

类似地，可证得 9.6.2(2)中的结论。

习题 9.6

1. 设 R 与 S 均为环，设 F 是从范畴 $\mathrm{Mod}(R)$ 到 $\mathrm{Mod}(S)$ 的共变正合函子，则 F 保持像与核。即若 $f: A \to B$，则有 $\mathrm{Im}(F(f)) = F(\mathrm{Im}(f))$ 与 $\mathrm{Ker}(F(f)) = F(\mathrm{Ker}(f))$。

2. 设 A 与 $B_j (j \in I)$ 均是环 R 上的模，且 $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$，则有群同构

$$\mathrm{Hom}_R(A, B) \cong \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_R(A_i, B).$$

3. 设 A 与 $B_j (j \in I)$ 均是环 R 上的模，且 $B = \prod_{i \in I} B_i$，则有群同构 $\mathrm{Hom}_R(A, B) \cong \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_R(A, B_i)$。

4. 设 R 与 S 均为环，F 是从范畴 $\mathrm{Mod}(R)$ 到 $\mathrm{Mod}(S)$ 的共变正合函子，M 是一个 R-模，M_1，M_2，…，M_n 是 M 的子模，证明：

作为 $F(M)$ 的子模，有 $F(M_1 + M_2 + \cdots + M_n) = F(M_1) + F(M_2) + \cdots + F(M_n)$ 与 $F(M_1 \cap M_2 \cap \cdots \cap M_n) = F(M_1) \cap F(M_2) \cap \cdots \cap F(M_n)$。

5. 设 $\mathbb{Z}$ 是整数环，令 $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$，证明：

(1) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, -)$ 不是正合函子。

(2) $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Z}_n)$ 不是正合函子。

6. 设 R 是一个环，M 是一个 R-模，证明：$\mathrm{Hom}_R(M, -)$ 与 $\mathrm{Hom}_R(-, M)$ 是 R-模范畴 $\mathrm{Mod}(R)$ 到交换群范畴 Γ 的加法范畴。

参考文献

[1] F. W. Anderson, K R. Fuller. Rings and Categories of Modules. New York: Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmaH & Co. k New York Inc. 1974.

[2] J. Lambek. Lectures on Rings and Modules. Blaisdell Publishing Company, 1966.

[3] T. Y. Lam. Lectures on Rings and Modules. Berlin: Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & & Co. k, 1998.

[4] T. W. Hungerford. Algebra. World Publishing Corporation, 1974.

[5] F. Kasch. Moduln und Ringe. B. G. Teubner. Stuttgart, 1977.

[6] C. Faith. Algebra: Rings, Modules and Categories Ⅰ. Berlin: Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. k, 1973.

[7] B. Mitchell. Theory of Categories, Academic Press, 1965.

[8] T. S. Blyth. Module Theory: An Approach to Linear Algebra. Oxford: Oxford University Press, 1990.

[9] C. Faith, S. Wiegand. Module Theory , Lecture Notes in Mathematics, Vol. 700. Berlin: Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. K, 1979.

[10] M. E. Keating. A First Course in Module Theory. Singapore: World Scientific Publishing Company, 1998.

[11] A. Facchini. Module Theory. Berlin: Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. K, 1998.

符号说明

1. $\hookrightarrow$表示“子模关系”
2. $:\Leftrightarrow$或$:=$表示“定义为”
3. $\Leftrightarrow$表示“当且仅当”
4. $\exists$表示“存在”
5. $\wedge$表示“并且”
6. $\vee$表示“或者”
7. $\forall$表示“任意”
8. $\underset{\neq}{\hookrightarrow}$表示“真子模”
9. $\not\hookrightarrow$表示“不是子模关系”
10. $\Rightarrow$表示“蕴含”或“必要性”
11. $\Leftarrow$表示“充分性”
12. i. e. 表示“亦即”
13. $\overset{\circ}{\hookrightarrow}$表示“小子模关系”
14. $\overset{*}{\hookrightarrow}$表示“大子模关系”
15. $\rightarrowtail$表示“单态射”
16. $\twoheadrightarrow$表示“满态射”

名词索引

生成元(Generator)
生成集(Generating Set)
半单模(Semi Simple Module)
半阿廷模(Semi Artinian Module)
半诺特模(Semi Noetherian Module)
本质子模(Essential Module)
对象(Object)
对偶基(Duality Base)
对偶基引理(Duality Base Lemma)
加补(Additive Complement)
加法范畴(Additive Category)
加法函子(Additive Functor)

六画

同构(Isomorphism)
同构映射(Isomorphism)
同态(Homomorphism)
同态定理(Homomorphism Theorem)
同调(Homology)
同调模(Homology Module)
自然同态(Natural Homomorphism)
自然变换 (Natural Transformation)
自由模(Free Module)
自同态(Endomorphism)
有限生成模(Finitely Generated Module)
有限生成理想(Finitely Generated Ideal)
交换图(Commutative Diagram)
合成列(Composition Series)
合成因子(Composition Factor)
齐次分支(Homogeneous Component)
交补(Intersection Complement)

七画

投影映射(Projection)
投射模(Projective Module)
投射盖(Projective Cover)
态射(Morphism)
补(Complement)
希尔伯特基定理(Hilbert's Basis Theorem)
两边理想(Two - sided Ideal)
局部化(Localization)
良环(Good Ring)
体(Skew Field or Division)
范畴(Category)

八画

单模(Simple Module)
单射(Injective Map)
单同态(Injective Homomorphism)
单态射(Monomorphism)
和(Sum)
直和(Direct Sum)
直积(Direct Product)
直和项(Direct Summand)
范畴(Category)
降链条件(Descending Chain Condition)
环(Ring)
直和分解(Direct Decomposition)
阿贝尔群(Abelian Group)
阿贝尔范畴(Abelian Category)
函子(Functor)
忠实模(Faithful Module)
诣零理想(Nil Ideal)
极大条件(Maximal Condition)
极大理想(Maximal Ideal)
极小条件(Minimal Condition)
极小理想(Minimal Ideal)
拉回(Pullback)

九画

十画

十一画

十二画

十三画

十四画